



# PRE-GAT&PAT มีนา

## เฉลยข้อสอบ

PAT1 วิชาความถนัดทางคณิตศาสตร์ (รหัสวิชา 71)

เปิดสอบแบบเปเปอร์ทางอินเทอร์เน็ต ในช่วงวันที่กำหนดไว้ เท่านั้น

### คำอธิบาย

1. ข้อสอบชุดนี้ มีจำนวน 50 ข้อ คะแนนเต็ม 300 คะแนน ให้เวลารวม 3 ชั่วโมง
2. นักเรียนจะต้องพยายามทำข้อสอบและจับเวลาเหมือนกับการสอบแข่งขันจริง ห้ามใช้เวลาสอบเกินที่กำหนดและห้ามเปิดตำราดู หรือนำอุปกรณ์ช่วยในการคิดคำนวณมาใช้เด็ดขาด ทั้งนี้เพื่อประโยชน์ในการทดสอบวัดความรู้ของตัวนักเรียนเอง
3. การประเมินผล นักเรียนสามารถเข้ามาดูเฉลยข้อสอบอย่างละเอียดได้ ในช่วงวันที่กำหนดไว้ ทาง [www.bunditnaeaw.com](http://www.bunditnaeaw.com) ซึ่งจะทำได้สามารถตรวจคะแนนที่ทำได้ด้วยตนเอง

### เรียนท่านผู้ปกครอง, ครู-อาจารย์ และนักเรียนทุกท่าน

หากท่านมีความคิดเห็นเพิ่มเติม หรือแตกต่างจากเฉลยข้อสอบที่โชว์ไว้นี้ ท่านสามารถแสดงความคิดเห็นให้บัณฑิตแนะแนวทราบ ได้ทั้งทางแฟกซ์อัตโนมัติ ที่หมายเลข 02-6171820 และทางเว็บไซต์ (โดยคลิกที่ปุ่มเลือกแสดงความคิดเห็นในฟอร์มเลือกดูเฉลยข้อสอบแต่ละวิชา) ที่มงานบัณฑิตแนะแนวขอขอบพระคุณในความคิดเห็นของท่านล่วงหน้า และจะนำไปปรับปรุงการทำงานให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้นต่อไป

(สงวนลิขสิทธิ์ห้ามเผยแพร่หรืออ้างอิงก่อนได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษร)





## เฉลยข้อสอบ PRE-GAT & PAT'มีนา (ทาง INTERNET)

### PAT1 : วิชาความถนัดทางคณิตศาสตร์ รหัสวิชา 71

1. b.   2. c.   3. b.   4. b.   5. a.   6. c.   7. b.   8. a.   9. c.   10. c.  
 11. b.   12. b.   13. c.   14. a.   15. d.   16. c.   17. a.   18. c.   19. d.   20. c.  
 21. a.   22. c.   23. c.   24. d.   25. c.   26. d.   27. a.   28. a.   29. c.   30. d.  
 31. c.   32. a.   33. c.   34. d.   35. b.   36. c.   37. c.   38. a.   39. c.   40. b.  
 41. b.   42. a.   43. d.   44. c.   45. d.   46. b.   47. c.   48. b.   49. c.   50. d.

1. เฉลย b. ก. จริง และ ข. เท็จ

จาก  $(p \wedge q) \leftrightarrow \sim(p \wedge r)$  มีค่าความจริงเป็นจริง ดังนั้น  $(p \wedge q) \equiv \sim(p \wedge r)$  แบ่งพิจารณาเป็น

2 กรณี

**กรณีที่ 1**  $p \wedge q \equiv T$  และ  $\sim(p \wedge r) \equiv T \equiv \sim p \vee \sim r$

กรณีนี้พิจารณา  $p \wedge q$  เป็นหลัก เพราะมีค่าความจริงเป็นจริงกรณีเดียว

$$\text{จาก } p \wedge q \equiv T \quad \therefore p \equiv T$$

$$q \equiv T$$

$$\text{จาก } \sim p \vee \sim r \equiv T$$

$$\text{เนื่องจาก } p \equiv T \quad \therefore \sim T \vee \sim r \equiv T$$

$$F \vee \sim r \equiv T$$

$$\sim r \equiv T$$

$$r \equiv F$$

สรุปกรณีนี้  $p \equiv T, q \equiv T$  และ  $r \equiv F$

$$T \quad T \quad \textcircled{T} \quad F \quad \quad \quad T \quad T \quad \textcircled{F} \quad F$$

$$\text{ก. } p \rightarrow (q \vee r) \text{ มีค่า } T \quad \quad \quad \text{ข. } p \rightarrow (q \wedge r) \text{ มีค่า } F$$

**กรณีที่ 2**  $p \wedge q \equiv F$  และ  $\sim(p \wedge r) \equiv \sim p \vee \sim r \equiv F$

กรณีนี้พิจารณา  $\sim p \vee \sim r$  เป็นหลัก เพราะมีค่าความจริงเป็นเท็จกรณีเดียว

นั่นคือ  $\sim p \equiv F$  และ  $\sim r \equiv F$

ดังนั้น  $p \equiv T$  และ  $r \equiv T$

$$\text{เนื่องจาก } p \wedge q \equiv F$$

$$\text{แต่ } p \equiv T \quad \therefore T \wedge q \equiv F$$

$$\therefore q \equiv F$$

สรุปกรณีนี้  $p \equiv T, q \equiv F$  และ  $r \equiv T$

$$T \quad F \quad \textcircled{T} \quad T \quad \quad \quad T \quad F \quad \textcircled{F} \quad T$$

$$\text{ก. } p \rightarrow (q \vee r) \text{ มีค่า } T \quad \quad \quad \text{ข. } p \rightarrow (q \wedge r) \text{ มีค่า } F$$

นั่นคือ ก. จริง และ ข. เท็จ



2. เฉลย c.  $\forall x \exists y [x^2 - y = y^2 - x]$

แบ่งเป็น 3 กรณี

กรณีที่ 1  $x = -1$  จะได้  $(-1)^2 - y = y^2 - (-1)$

$$y^2 + y = 0$$

$$y(y + 1) = 0$$

$$y = 0, -1 \in U$$

กรณีที่ 2  $x = 0$  จะได้  $0 - y = y^2 - 0$

$$y^2 + y = 0$$

$$y = 0, -1 \in U$$

กรณีที่ 3  $x = 1$  จะได้  $(1)^2 - y = y^2 - (1)$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$(y + 2)(y - 1) = 0$$

$$y = 1, -2 (1 \in U)$$

นั่นคือแต่ละค่าของ  $x \in U$  จะมีค่า  $y \in U$  อย่างน้อย 1 ค่า ที่ทำให้สมการ  $x^2 - y = y^2 - x$

$\therefore \forall x \exists y [x^2 - y = y^2 - x]$  มีค่าความจริงเป็นจริง

3. เฉลย b.  $A \subseteq \{P(A)\}$

a. ถูก  $\because \phi \subseteq A$  เนื่องจากพาวเวอร์เซตมีสมาชิก คือ สับเซตของเซตนั้น และ  $\phi$  เป็นสับเซตของทุกเซต ดังนั้น  $\phi$  เป็นสมาชิกของทุกพาวเวอร์เซตแน่ๆ ไม่ว่า  $A$  จะเป็นเซตใดก็ตาม

b. ผิด เห็นได้ชัดเจน (โดยอาศัยความเข้าใจ คำว่า “สับเซต”)  $\{P(A)\}$  เป็นเซตที่มีสมาชิกเดียว ขณะที่  $A$  มี 4 สมาชิก

c. ถูก  $\because \{\phi, \{A\}\}$  เป็นสับเซตของเซต  $A$

d. ถูก  $\because A - P(A) = A - A \cap P(A)$

$$= \{0\}; \text{ เพราะ } \phi, \{0\}, \{A\} \text{ ต่างก็เป็นสับเซตของ } A$$

$$\therefore n(A - P(A)) = 1$$

4. เฉลย b. 256

ข้อนี้อาศัยหลัก คือ จำนวนที่ 4 และ 6 ทหารลงตัว จะต้องหาร ค.ร.น. ของ 4 กับ 6 ลงตัวด้วย ในที่นี้ คือ 12

$$A \cap B = \{x \mid 0 < x \leq 100 \text{ และ } 4 \text{ และ } 6 \text{ ต่างก็หาร } x \text{ ลงตัว}\}$$

$$= \{x \mid 0 < x \leq 100 \text{ และ } 12 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$$

$$= \{12(1), 12(2), 12(3), \dots, 12(8)\}$$

$$n(A \cap B) = 8$$

$$nP(A \cap B) = 2^8$$

$$= 256$$



5. เฉลย a.  $\{x \mid 4x^2 - 12x + 5 = 0\}$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา} \quad 12x - 31^5 &= 32 \\ &= 2^5 \\ 12x - 31 &= 2 \\ 2x - 3 &= \pm 2 \\ 2x - 1 &= 0, \quad 2x - 5 = 0 \\ (2x - 1)(2x - 5) &= 0 \\ 4x^2 - 12x + 5 &= 0 \end{aligned}$$

6. เฉลย c. 2.5

จากความจริงที่ว่า ถ้า  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  เป็นคำตอบที่ไม่ซ้ำกันของสมการ  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  แล้ว  
จะได้ว่า  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= -\frac{(-5)}{2} \\ &= \frac{5}{2} \\ &= 2.5 \end{aligned}$$

$$*(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = 0 \text{ เป็นสมการเดียวกับ } x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

จะได้  $x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0$  เป็นสมการ  
เดียวกับ  $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$

$$\text{นั่นคือ } 1. \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a}$$

$$2. \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{c}{a}$$

$$3. \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{a}$$

**ข้อสังเกต** กรณีนี้  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ต้องไม่ซ้ำกัน เพราะถ้ามีตัวใดซ้ำกัน อย่างเช่น  $\alpha_1 = \alpha_2$  จะทำให้เซต  
คำตอบของสมการ คือ  $\{\alpha_1, \alpha_3\}$  แทนที่จะเป็น  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  ทำให้ผลบวกในเซตคำตอบผิดไป

7. เฉลย b.  $(-\infty, 1)$

$$\text{เขียนสมการใหม่เป็น } \frac{3x-1}{x-1} < -x$$

แบ่งเป็น 2 กรณี

$$\text{กรณีที่ 1 } x - 1 > 0 \text{ จะได้ } \frac{3(x-1)}{x-1} < -x$$

$$\text{หรือ } x > 1 \quad 3 < -x$$

$$x < -3$$

กรณีนี้ไม่มีคำตอบ เพราะ  $x > 1$  ด้วย

$$\text{กรณีที่ 2 } x - 1 < 0 \text{ จะได้ } \frac{3[-(x-1)]}{x-1} < -x$$

$$\text{หรือ } x < 1 \quad -3 < -x$$

$$x < 3 \quad \text{และ } x < 1$$

ดังนั้น กรณีนี้เซตคำตอบ คือ  $(-\infty, 1)$



8. เฉลย a.  $-\frac{3}{2}$

จาก

$$g(x) = 2x + 5$$

จะได้

$$g^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

$$f^{-1} \circ g^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x))$$

$$= f^{-1}\left(\frac{x-5}{2}\right)$$

$$= 5x - 2$$

จะได้

$$f(5x - 2) = \frac{x-5}{2}$$

ให้

$$5x - 2 = 8$$

$$x = 2$$

ดังนั้น แทน  $x = 2$  จะได้

$$f(8) = \frac{2-5}{2}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

9. เฉลย c. (2, 4]

$$f(x) = \sqrt{4x - x^2}$$

$$= \sqrt{4 - (x^2 - 4x + 4)}$$

$$= \sqrt{4 - (x-2)^2}$$

$D_f$  คือ เซตคำตอบของอสมการ

$$4 - (x-2)^2 \geq 0$$

$$(x-2)^2 \leq 4$$

$$-\sqrt{4} \leq x-2 \leq \sqrt{4}$$

$$-2 \leq x-2 \leq 2$$

$$0 \leq x \leq 4$$

จะได้

$$D_f = [0, 4]$$

และจะเห็นว่า

$$0 \leq \sqrt{4 - (x-2)^2} \leq 2$$

ดังนั้น

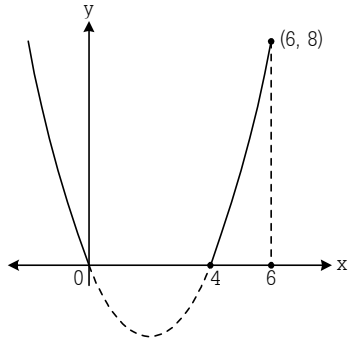
$$R_f = [0, 2]$$

$$D_f - R_f = [0, 4] - [0, 2]$$

$$= (2, 4]$$



10. เฉลย c.  $f$  ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 - 1

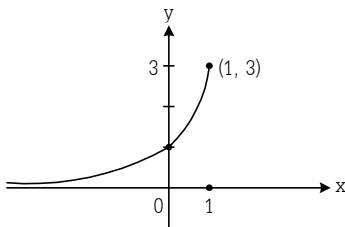


เขียนกราฟของ  $f(x) = x^2 - 4x$

$$D_f = (-\infty, 0] \cup [4, 6]$$

$$R_f = [0, \infty)$$

จะเห็นว่า  $f$  ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 เพราะ  $(0, 0)$  และ  $(4, 0)$  อยู่ในฟังก์ชัน  $f$



เขียนกราฟของ  $g(x) = 3^x, x \in (-\infty, 1]$

$$D_g = (-\infty, 1]$$

$$R_g = (0, 3]$$

$g$  เป็นฟังก์ชัน 1 - 1

11. เฉลย b.  $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

$$\tan \theta - \sec \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\therefore \sec \theta - \tan \theta = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

เนื่องจาก  $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$

$$(\sec \theta - \tan \theta)(\sec \theta + \tan \theta) = 1$$

$$\sec \theta + \tan \theta = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta}$$

$$= \frac{1}{-\frac{\sqrt{7}}{3}}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$= -\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

12. เฉลย b.  $1 - 2x^2$ 

$$\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{2010} \quad \dots(1)$$

จากสูตร  $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \quad \dots(2)$

$$(1) + (2); \quad 2 \arccos x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2010}$$

$$\cos(2 \arccos x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2010}\right)$$

$$2 \cos^2(\arccos x) - 1 = -\sin\left(\frac{\pi}{2010}\right)$$

$$2x^2 - 1 = -\sin\left(\frac{\pi}{2010}\right)$$

$$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{2010}\right) = 1 - 2x^2$$

13. เฉลย c.  $2\sqrt{3}$ 

$$\begin{aligned} \sin A - \sin 2A + \sin 3A &= \sin A + \sin 3A - \sin 2A \\ &= 2 \sin\left(\frac{A+3A}{2}\right) \cos\left(\frac{A-3A}{2}\right) - \sin 2A \\ &= 2 \sin 2A \cos(-A) - \sin 2A \\ &= 2 \sin 2A \cos A - \sin 2A \\ &= \sin 2A (2 \cos A - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $0 < A < \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 < 2A < \pi$

$$\rightarrow \sin 2A > 0$$

$$\therefore 2 \cos A - 1 = 0$$

$$\cos A = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \tan A - \tan 2A + \tan 3A &= \tan \frac{\pi}{3} - \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{3}\right) \\ &= \tan \frac{\pi}{3} - \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \tan(\pi) \\ &= \sqrt{3} - (-\sqrt{3}) + 0 \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



14. เฉลย a. (2.5, 5]

$$y = kx + 1 \quad \dots(1)$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{40} = 1 \quad \dots(2)$$

จุดตัดกันของกราฟจาก (1) และ (2) คือ คำตอบของระบบสมการ (1) และ (2)

$$\text{แทน } y = kx + 1 \text{ ลงใน (2) ; } \frac{x^2}{4} - \frac{(kx + 1)^2}{40} = 1$$

$$10x^2 - (k^2x^2 + 2kx + 1) = 40$$

$$(10 - k^2)x^2 - 2kx - 41 = 0 \quad \dots(3)$$

กราฟทั้งสองจะตัดกันเมื่อค่าจาก (3) เป็นจำนวนจริง

$$\text{ดังนั้น } (-2k)^2 - 4(10 - k^2)(-41) \geq 0 ; (\text{จาก } b^2 - 4ac \geq 0)$$

$$4k^2 + 1640 - 164k^2 \geq 0$$

$$160k^2 \leq 1640$$

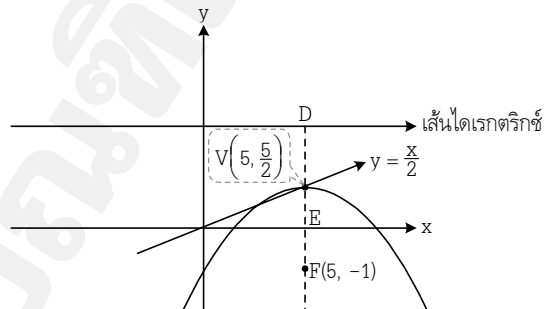
$$k^2 \leq \frac{1640}{160}$$

$$= 10.25$$

$$-\sqrt{10.25} \leq k \leq \sqrt{10.25}$$

ดังนั้น

$$k = 3$$

15. เฉลย d.  $y = 6$ จากรูป จะเห็นว่าจุดยอด คือ จุด  $(5, \frac{5}{2})$ 

$$VF = \frac{5}{2} - (-1) = \frac{7}{2}$$

$$= VD$$

$$DE = VD + VE = \frac{7}{2} + \frac{5}{2}$$

$$= 6$$

∴ สมการเส้นไดเรกทริกซ์ คือ  $y = 6$



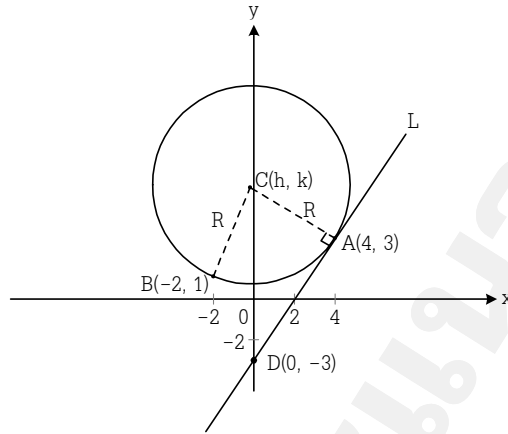
8



เฉลย PRE-PAT1 วิชาความถนัดทางคณิตศาสตร์มีนา (ทาง INTERNET)

16. เฉลย ค.  $7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$

ให้วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $C(h, k)$  รัศมี  $R$



จากรูป  $CA \perp L$  ;

$$\therefore m_{CA} \cdot m_L = -1 \left( m_L = \frac{0 - (-3)}{2 - 0} = \frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{k-3}{h-4} \cdot \left( \frac{3}{2} \right) = -1$$

$$3k - 9 = 8 - 2h$$

$$3k + 2h = 17 \quad \dots(1)$$

$$CB = CA$$

จะได้

$$(h+2)^2 + (k-1)^2 = (h-4)^2 + (k-3)^2$$

$$h^2 + 4h + 4 + k^2 - 2k + 1 = h^2 - 8h + 16 + k^2 - 6k + 9$$

$$12h + 4k - 20 = 0$$

$$3h + k = 5 \quad \dots(2)$$

3(2) ;

$$9h + 3k = 15 \quad \dots(3)$$

(3) - (1) ;

$$7h = -2$$

$$h = -\frac{2}{7}$$

แทนค่า  $h = -\frac{2}{7}$  ใน (2) ;

$$k = 5 - 3\left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{41}{7}$$

$$R^2 = CA^2$$

$$= \left(-\frac{2}{7} - 4\right)^2 + \left(\frac{41}{7} - 3\right)^2$$

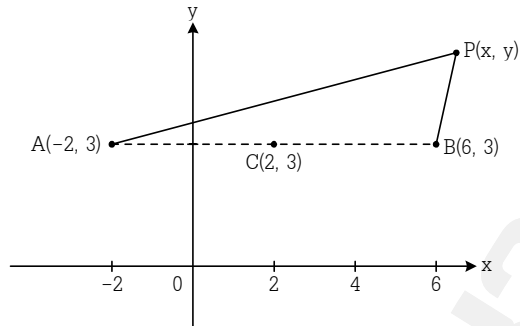
$$= \frac{1300}{49}$$

$$\therefore \text{สมการวงกลม คือ } \left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{41}{7}\right)^2 = \frac{1300}{49}$$

$$7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$$



17. เฉลย a. (2, 6)



จากเงื่อนไขการเคลื่อนที่ของอนุภาค ทำให้ทราบว่าทางเดินของอนุภาคจะเป็นกราฟรูปวงรีที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่ A(-2, 3) และ B(6, 3)

$$\begin{aligned} PA + PB &= 10 \\ &= \text{ความยาวของแกนเอก} \\ &= 2a \end{aligned}$$

$$\therefore a = 5$$

$$AB = 6 - (-2)$$

$$= 8$$

$$= 2c$$

$$c = 4$$

จุดศูนย์กลางของวงรี คือ จุดกึ่งกลางระหว่างจุด A และจุด B ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงรี คือ จุด (2, 3)

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$= 5^2 - 4^2$$

$$= 9$$

$$b = 3$$

สมการของวงรี คือ  $\frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1$

พิจารณาจุด (2, 6)  $\frac{(2-2)^2}{5^2} + \frac{(6-3)^2}{3^2} = 0 + \frac{3^2}{3^2}$

$$= 1$$

ดังนั้น จุด (2, 6) สอดคล้องกับสมการ จึงเป็นจุดที่อยู่บนวงรี



18. เฉลย ค. (1.0, 1.2)

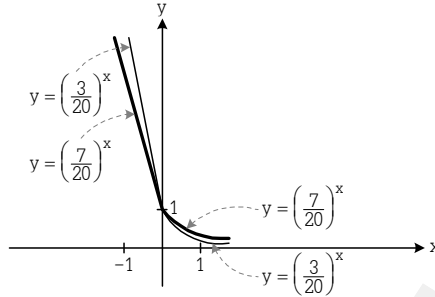
$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{2}\right)^{1-4x} &= (25)^{3-2x} \\
 (2^{-1})^{1-4x} &= (5^2)^{3-2x} \\
 2^{4x-1} &= 5^{6-4x} \\
 \frac{2^{4x}}{2} &= \frac{5^6}{5^{4x}} \\
 2^{4x} \cdot 5^{4x} &= 2 \cdot 5^6 \\
 10^{4x} &= 2 \cdot 5^6 = 10 \cdot 5^5 \\
 &= 10 \left(\frac{10}{2}\right)^5 = \frac{10^6}{2^5} \\
 4x &= \log\left(\frac{10^6}{2^5}\right) = 6 \log 10 - 5 \log 2 \\
 &= 6 - 5 \times 0.301 = 4.495 \\
 x &= \frac{4.495}{4} \\
 &= 1.12375 \in (1.0, 1.2)
 \end{aligned}$$

19. เฉลย ด. 46

$$\begin{aligned}
 5^{2x-y} &= 625 \\
 &= 5^4 \\
 2x - y &= 4 \quad \dots(1) \\
 2^{3y-2x} &= 8\sqrt{2} \\
 &= 2^3 \cdot 2^{1/2} \\
 &= 2^{7/2} \\
 3y - 2x &= \frac{7}{2} \quad \dots(2) \\
 (1) + (2); & \quad 2y = 4 + \frac{7}{2} \\
 &= \frac{15}{2} \\
 y &= \frac{15}{4} \\
 \text{แทนใน (1);} & \quad 2x - \frac{15}{4} = 4 \\
 2x &= \frac{15}{4} + 4 \\
 &= \frac{31}{4} \\
 4y + 8x &= 4\left(\frac{15}{4}\right) + 4\left(\frac{31}{4}\right) \\
 &= 15 + 31 \\
 &= 46
 \end{aligned}$$



20. เฉลย ค. ก. ผิด และ ข. ถูก



เขียนกราฟของ  $y = \left(\frac{3}{20}\right)^x$  และ  $y = \left(\frac{7}{20}\right)^x$  จะได้กราฟดังรูป เนื่องจากฟังก์ชันทั้งสองเป็นเอกซ์โพเนนเชียลฟังก์ชัน และเป็นฟังก์ชันลด

จะเห็นว่าเมื่อ  $x = 1$  จะได้  $\left(\frac{3}{20}\right)^1 + \left(\frac{7}{20}\right)^1 = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} < 1$

และเมื่อ  $x = 0$  จะได้  $\left(\frac{3}{20}\right)^0 + \left(\frac{7}{20}\right)^0 = 2$

และถ้า  $x > 1$  ค่าของ  $\left(\frac{3}{20}\right)^x + \left(\frac{7}{20}\right)^x$  จะยังมีค่าน้อยลง

ถ้า  $x$  เป็นคำตอบของสมการแล้ว  $0 < \alpha < 1$

และสมการนี้  $\left(\frac{3}{20}\right)^x + \left(\frac{7}{20}\right)^x = 1$  มีคำตอบเดียว

ก. ผิด

ข. ถูก

21. เฉลย a. ก. ถูก และ ข. ถูก

$$\begin{aligned}
 \text{ก. } C_{41}(A) &= (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{ตัดแถวที่ 4 และหลักที่ 1}) \\
 &= - \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{(R'_1 = R_1 - 2R_2)} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{(R''_1 = R'_1 + R'_3)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ก. ถูก

$$\begin{aligned}
 \text{ข. } xy &= z \\
 (xy)(y^{-1}) &= z(y^{-1}) \\
 x &= z(y^{-1}) \\
 \det(x) &= \det(zy^{-1}) = \det z \det(y^{-1}) \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\det y} = (-2) \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{-2}{4-6} = 1 \\
 \det(x^{-1}) &= \frac{1}{\det x} = 1
 \end{aligned}$$

ข. ถูก



22. เฉลย ค. -2

ให้  $a_{14}$  เป็นสมาชิกในแถวที่ 1 และหลักที่ 4 ของ  $A^{-1}$

$$a_{14} = \frac{C_{41}}{\det A}$$

$$C_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (R'_1 = R_1 + R_2)$$

$$= - \left[ 0 + 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \right]$$

$$\text{(ใช้หลักที่ 1 เป็นหลัก จะได้)} \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} + a_{31}c_{31}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -4$$

$$\det(A) = (1)(1)(1)(2)$$

$$= 2$$

$$\therefore a_{14} = -\frac{4}{2}$$

$$= -2$$

23. เฉลย ค. 3

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

เป็นระบบสมการที่มี 4 สมการ 4 ตัวแปร  $x, y, z, w$

$$\text{พิจารณาสมการ (1)} \quad x - y + z + w = 8 \quad \dots(1)$$

$$\text{สมการ (4)} \quad x - y - z + w = 2 \quad \dots(4)$$

$$(1) - (4); \quad 2z = 6$$

$$z = 3$$

24. เฉลย d.  $\frac{21}{5}$  $\vec{A}$  ตั้งฉากกับ  $\vec{B}$  จะได้  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$  (เวกเตอร์ตั้งฉากกันใช้สมบัตินี้เสมอ)

$$(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (4\vec{i} - 3\vec{j}) = 0$$

$$4x - 3y = 0, \quad y = \frac{4}{3}x \quad \dots(1)$$

 $|\vec{A}| = 3$  จะได้

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3$$

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \dots(2)$$

$$x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = 9$$

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 9$$

$$25x^2 = 81$$

$$x = \pm \frac{9}{5}$$

$$x = \frac{9}{5}, \quad y = \frac{4}{3} \left(\frac{9}{5}\right) = \frac{12}{5}$$

$$x = -\frac{9}{5}, \quad y = \frac{4}{3} \left(-\frac{9}{5}\right) = -\frac{12}{5}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{C} > 0$$

$$(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (-5\vec{i} + 5\vec{j}) > 0$$

$$-5x + 5y > 0$$

$$y > x$$

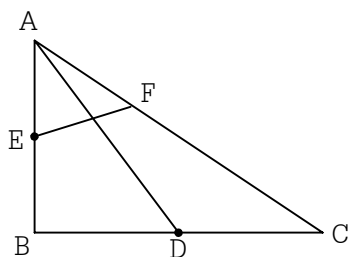
$$\therefore x = \frac{9}{5}, \quad y = \frac{12}{5}$$

$$x + y = \frac{9}{5} + \frac{12}{5}$$

$$= \frac{21}{5}$$

25. เฉลย c.  $\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$ 

จากรูป



$$\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AF}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{AC}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{BD} + \vec{DA}) + \frac{1}{3}(\vec{AD} + \vec{DC})$$

$$= \frac{1}{2}[\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b})] + \frac{1}{3}[-(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a}]$$

$$= \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$



26. เฉลย d.  $3\sqrt{3} + i$

$$(z - 2\sqrt{3})^3 + 8i = 0$$

$$(z - 2\sqrt{3})^3 = -8i$$

หารากที่ 3 ของ  $-8i$  ;

$$-8i = 8(-i)$$

$$= 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

ให้  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  เป็นรากที่ 3 ของ  $-8i$

จากสูตร รากที่  $n$  ของ  $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right)\right]$

โดย

$$k = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$$

$$\alpha_1 = 8^{1/3}\left[\cos\left(\frac{0\pi + \frac{3\pi}{2}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0\pi + \frac{3\pi}{2}}{3}\right)\right] \quad (k = 0)$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2i$$

$$\alpha_2 = 8^{1/3}\left[\cos\left(\frac{2\pi + \frac{3\pi}{2}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi + \frac{3\pi}{2}}{3}\right)\right] \quad (k = 1)$$

$$= 2\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right] = 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right] = -\sqrt{3} - i$$

$$\alpha_3 = 8^{1/3}\left[\cos\left(\frac{4\pi + \frac{3\pi}{2}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi + \frac{3\pi}{2}}{3}\right)\right] \quad (k = 2)$$

$$= 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$$

จะได้  $(z_1 - 2\sqrt{3}) = 2i,$

$$z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$$

$$|z_1| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16}$$

$$= 4$$

(จำนวนเต็ม)

$$(z_2 - 2\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - i, \quad z_2 = \sqrt{3} - i$$

$$|z_2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \quad (\text{จำนวนเต็ม})$$

$$(z_3 - 2\sqrt{3}) = \sqrt{3} - i, \quad z_3 = 3\sqrt{3} - i$$

$$|z_3| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{7}$$

$$\therefore z_1 + z_2 = (2\sqrt{3} + 2i) + (\sqrt{3} - i)$$

$$= 3\sqrt{3} + i$$



27. เฉลย a. วงรี

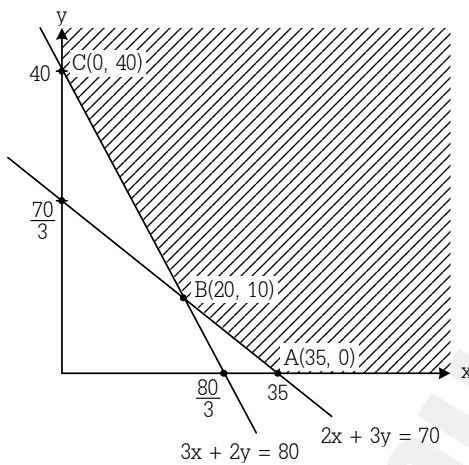
จากความจริงที่ว่า  $|z_1 - z_2|$  คือ ระยะห่างระหว่างจุด  $z_1, z_2$  ในระนาบเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$|z + 1 - 2i| + |z - 7 - 2i| = |z - (-1, + 2i)| + |z - (7 + 2i)| = 10$$

นั่นคือ ผลบวกของระยะจากจุด  $(x, y)$  ไปยังจุด  $(-1, 2)$  และจุด  $(7, 2)$  บนระนาบเชิงซ้อนเท่ากับ 10 หน่วย

ดังนั้น กราฟของสมการ  $|z + 1 - 2i| + |z - 7 - 2i| = 10$  จึงเป็นรูปวงรีที่มีจุด  $(-1, 2)$  และ  $(7, 2)$  เป็นจุดโฟกัส และมีแกนเอกยาว 10 หน่วย (ตามนิยามของกราฟวงรี)

28. เฉลย a. 525



หาจุดตัดของเส้นตรง

$$3x + 2y = 80 \quad \dots(1)$$

$$2x + 3y = 70 \quad \dots(2)$$

$$3(1) ; \quad 9x + 6y = 240 \quad \dots(3)$$

$$2(2) ; \quad 4x + 6y = 140 \quad \dots(4)$$

$$(3) - (4) ; \quad 5x = 100$$

$$x = 20$$

$$\text{แทนใน (1) ; } 3(20) + 2y = 80$$

$$60 + 2y = 80$$

$$2y = 80 - 60$$

$$= 20$$

$$y = 10$$

จุดตัด คือ  $(20, 10)$

$(x, y)$	$C = 15x + 30y$
A(35, 0)	525
B(20, 10)	600
C(0, 40)	1200

จากตาราง ค่าต่ำสุดของ  $C = 525$





29. เฉลย ค.  $\frac{3}{16}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 b + 2}{3n^3 a - 2} = 1$$

$$\frac{b}{3a} = 1$$

$$b = 3a$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{ab}{a^2 + 2b^2} \right)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a(3a)}{a^2 + 2(3a)^2} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3a^2}{a^2 + 18a^2} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{19} \right)^n \quad \text{เป็นอนุกรมเรขาคณิต } a_1 = \frac{3}{19} = r \\ &= \frac{\frac{3}{19}}{1 - \frac{3}{19}} \quad \left( S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} \right) \\ &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

30. เฉลย d. 1

พิจารณา

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$S_n = \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \dots + \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$



31. เฉลย ค. มีผลบวกอนันต์เป็น 1

$$\begin{aligned}
 a_n &= \det \left( \frac{1}{2}A \right)^n \\
 &= \left[ \det \left( \frac{1}{2}A \right) \right]^n \\
 &= \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 \det A \right]^n \\
 &= \left[ \frac{1}{4}(1+1) \right]^n \\
 &= \left( \frac{1}{2} \right)^n \\
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n \text{ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง } a_1 = \frac{1}{2} = r \\
 &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

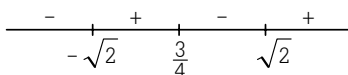
32. เฉลย a.  $\frac{27}{16}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(8+h) - f(8)}{f(27+h) - f(27)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(8+h) - f(8)}{h}}{\frac{f(27+h) - f(27)}{h}} \\
 &= \frac{f'(8)}{f'(27)} \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{8}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} \right)}{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{27}} + \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} \right)} \\
 &= \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right)}{\left( \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \right)} \\
 &= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{9}} \\
 &= \frac{3}{4} \times \frac{9}{4} \\
 &= \frac{27}{16}
 \end{aligned}$$



33. เฉลย ค.  $(-1, \frac{3}{4})$  เป็นช่วงที่  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - x^3 - 4x^2 + 6x - 5 \\ f'(x) &= 4x^3 - 3x^2 - 8x + 6 \\ &= x^2(4x - 3) - 2(4x - 3) \\ &= (4x - 3)(x^2 - 2) \\ &= (4x - 3)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \end{aligned}$$



จากทฤษฎีเส้นจำนวนจะเห็นว่าช่วง  $(-1, \frac{3}{4})$   $f'(x) > 0$

ดังนั้น ช่วง  $(-1, \frac{3}{4})$  เป็นช่วงที่  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

34. เฉลย ด.  $\frac{72}{5}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \quad (x \geq 0) \\ f^{-1}(x) &= x^2 \\ \therefore g(x) &= \frac{f^{-1}(x)+1}{\sqrt{x}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= x^{3/2} + x^{-1/2} \end{aligned}$$

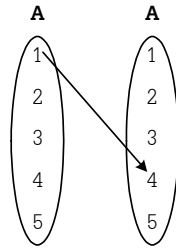
$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่ที่ต้องการ} &= \int_1^4 (x^{3/2} + x^{-1/2}) dx \\ &= \left( \frac{2}{5}x^{5/2} + 2x^{1/2} \right) \Big|_1^4 \\ &= \left( \frac{2}{5}(4)^{5/2} + 2(4)^{1/2} \right) - \left( \frac{2}{5} + 2 \right) \\ &= \frac{64}{5} + 4 - \frac{2}{5} - 2 \\ &= \frac{72}{5} \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$



## 35. เฉลย b. 48

เนื่องจาก  $f(1) > 3$  เราจะแยกได้เป็น 2 กรณี

**กรณีที่ 1**  $f(1) = 4$  จากรูปจะเห็นว่าสมาชิก A ข้างซ้ายที่เหลือ คือ 2, 3, 4, 5 สมาชิก A ข้างขวาที่เหลือ คือ 1, 2, 3, 5 มีจำนวนเท่ากัน คือ 4 จำนวน จับคู่กันแบบ 1 - 1 ได้  $4! = 24$  วิธี



**กรณีที่ 2**  $f(1) = 5$  พิจารณาทำนองเดียวกับกรณีที่ 1 ก็จะได้ 24 วิธีเช่นกัน  
ดังนั้น จำนวนฟังก์ชันตามที่โจทย์ต้องการ =  $24 + 24 = 48$

## 36. เฉลย c. 70

จากโจทย์จะเห็นว่าแต่ละวิธี นักเรียนชายจะสลับที่กันระหว่างนักเรียนชายไม่ได้ เช่นเดียวกับนักเรียนหญิงที่ไม่สามารถสลับที่ระหว่างนักเรียนหญิงด้วยกันได้ แต่ระหว่างนักเรียนชายกับนักเรียนหญิงสลับที่กันได้

ดังนั้น สิ่งที่ต้องพิจารณา คือ ในตำแหน่งทั้ง 8 ตำแหน่งนั้น เราจะเลือกมา 4 ตำแหน่ง เพื่อให้ให้นักเรียนชายส่วนที่เหลืออีก 4 ตำแหน่ง ก็จะเป็นของนักเรียนหญิง

$$\text{จำนวนวิธีทั้งหมด} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

37. เฉลย c.  $\frac{2}{9}$ 

$$n(S) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \quad (\text{แต่ละฉบับจะใส่ตู้ก็ได้})$$

$$n(E) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (\text{ฉบับแรกใส่ตู้ไหนก็ได้ ฉบับที่ 2 เหลืออีก 2 ตู้ ฉบับสุดท้ายเหลือตู้เดียว})$$

$$P(E) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{9}$$

38. เฉลย a.  $\frac{6}{11}$ 

ตามเงื่อนไขจากโจทย์จะแบ่งได้เป็น 3 กรณี

**กรณีที่ 1** ได้สีแดง 2 ลูก สีน้ำเงิน 1 ลูก สีเหลือง 1 ลูก

$$\text{ได้} = C_{(4, 2)} \cdot C_{(3, 1)} \cdot C_{(5, 1)} = 6 \cdot 3 \cdot 5 = 90$$

**กรณีที่ 2** ได้สีแดง 1 ลูก สีน้ำเงิน 2 ลูก สีเหลือง 1 ลูก

$$\text{ได้} = C_{(4, 1)} \cdot C_{(3, 2)} \cdot C_{(5, 1)} = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

**กรณีที่ 3** ได้สีแดง 1 ลูก สีน้ำเงิน 1 ลูก สีเหลือง 2 ลูก

$$\text{ได้} = C_{(4, 1)} \cdot C_{(3, 1)} \cdot C_{(5, 2)} = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 120$$

$$\therefore n(E) = 90 + 60 + 120 = 270$$

$$n(S) = C_{(12, 4)} = \frac{12!}{8!4!} = 495$$

$$P(E) = \frac{270}{495} = \frac{30}{55} = \frac{6}{11}$$



39. เฉลย ค. 0.7

$$\begin{aligned}
 E &= \{(2, 3, 4), (2, 4, 5), (2, 5, 6), (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 5, 6)\} \\
 n(E) &= 7 \text{ (ในรูป } \Delta \text{ ใดๆ ผลบวกของ 2 ด้าน จะยาวกว่าด้านที่เหลือ)} \\
 n(S) &= C_{(5, 3)} = 10 \\
 P(E) &= \frac{7}{10} = 0.7
 \end{aligned}$$

40. เฉลย บ.  $\frac{\sqrt{2}}{8}$ 

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของเด็กกลุ่มนี้ ณ ปัจจุบัน =  $\frac{2+3+4+5+6}{5} = 4$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}} \\
 S &= \sqrt{\frac{(2-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2}{5}} \\
 &= \sqrt{\frac{10}{5}} \\
 &= \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $x'_i = x_i + 4$

$$\therefore \bar{x}' = \bar{x} + 4, S' = S = \sqrt{2}$$

(ไม่ว่าจะผ่านไปกี่ปี ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุเด็กกลุ่มนี้ก็ยิ่งเหมือนเดิมเสมอ)

$\bar{x} = 4$  จะได้  $\bar{x}' = 4 + 4 = 8$

สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของอายุเด็กกลุ่มนี้อีก 4 ปีข้างหน้า

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน}}{\text{ค่าเฉลี่ย}} \\
 &= \frac{S'}{\bar{x}'} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{8}
 \end{aligned}$$



41. เฉลย b. 10

ช่วงคะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
1-10	4	4
11-20	x	4 + x
21-30	y	4 + x + y
31-40	10	14 + x + y
41-50	7	21 + x + y
51-60	3	24 + x + y

ช่วงคะแนน	f	F
1-10	4	4
11-20	6	10
21-30	10	20
31-40	10	30
41-50	7	37
51-60	3	40

จากตารางจะได้

$$x_{4+x} = 20.5 = Q_1$$

$$\therefore 4 + x = \frac{1}{4} (24 + x + y) \quad [\text{จาก } x_i = Q_k \rightarrow i = \frac{k}{4} (N)]$$

$$16 + 4x = 24 + x + y$$

$$3x - y = 8$$

...(1)

และ

$$x_{4+x+y} = \text{มัธยฐาน}$$

$$= 30.5$$

$$\therefore 4 + x + y = \frac{24 + x + y}{2} \quad [\text{จาก } x_i = \text{Med} \rightarrow i = \frac{N}{2}]$$

$$8 + 2x + 2y = 24 + x + y$$

$$x + y = 16$$

...(2)

(1) + (2) ;

$$4x = 24$$

$$x = 6, y = 10$$

หาค่า  $Q_3$

$$i = \frac{3}{4} (40) = 30$$

$$\therefore Q_3 = x_{30} = 40.5$$

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{40.5 - 20.5}{2}$$

$$= 10$$



## 42. เฉลย a. 2

เนื่องจาก  $\sum_{i=1}^5 (x_i - A)^2$  มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ  $A = 5$  แสดงว่าข้อมูลชุดนี้มี  $\bar{x} = 5$  (ทฤษฎี)

$$\text{จะได้ว่า } \frac{3+4+5+6+a}{5} = 5$$

$$a = 7$$

$$\text{ความแปรปรวน} = \frac{(3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2}{5}$$

$$= \frac{-2^2 + 1 + 0 + 1 + 2^2}{5}$$

$$= 2$$

## 43. เฉลย d. 10

จากความจริง

$$\sum_{i=1}^N Z_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{20} Z_i = 0$$

$$Z_0 + \sum_{i=1}^{19} Z_i = 0$$

$$Z_0 + 2.5 = 0$$

$$Z_0 = -2.5$$

$$\frac{x_0 - 60}{S} = -2.5$$

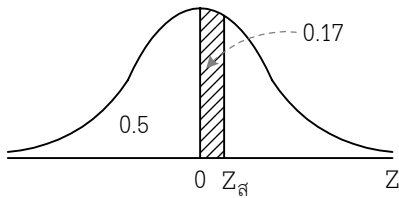
$$\frac{35 - 60}{S} = -2.5$$

$$-25 = -2.5S$$

$$S = 10$$



44. เฉลย ค. 48.96



เนื่องจาก คะแนนสอบของนายแสงชัย =  $P_{67}$   
 ให้  $Z_{\text{ส}}$  = ค่ามาตรฐานของคะแนนสอบของนายแสงชัย  
 จากเส้นโค้งความถี่ของ  $Z$  จะได้

$$A \text{ ของ } Z_{\text{ส}} = 0.17$$

$$\therefore Z_{\text{ส}} = 0.44 \text{ (จากตาราง)}$$

$$\frac{x_{\text{ส}} - 45}{S} = 0.44 ; \left( Z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S} \right)$$

$$x_{\text{ส}} - 0.44S = 45 \quad \dots(1)$$

จากโจทย์  $\frac{S}{x} = 0.20$

$$\frac{S}{45} = 0.20 \quad \dots(2)$$

แทนใน (1) ;  $S = (0.20)(45)$

$$= 9$$

$$x_{\text{ส}} - 0.44(9) = 45$$

$$x_{\text{ส}} = 45 + 3.96$$

$$= 48.96$$

45. เฉลย ด. 81,000 บาท

ในที่นี้โจทย์กำหนดค่า  $y = 150$  ล้านบาท ต้องเขียนสมการความสัมพันธ์ในรูป  $x = ay + b$

y	x	xy	y <sup>2</sup>
10	5	50	100
4	2	8	16
3	1	3	9
6	3	18	36
7	4	28	49
$\Sigma y = 30$	$\Sigma x = 15$	$\Sigma xy = 107$	210

$$\sum_{i=1}^5 x_i = a \sum_{i=1}^5 y_i + 5b$$

$$15 = 30a + 5b \quad \dots(1)$$

$$\sum_{i=1}^5 y_i x_i = a \sum_{i=1}^5 y_i^2 + b \sum_{i=1}^5 y_i$$

$$107 = 210a + 30b \quad \dots(2)$$

7(1) ;

$$105 = 210a + 35b \quad \dots(3)$$





$$\begin{aligned}
 (3) - (2) ; & \quad -2 = 5b, \quad b = -\frac{2}{5} \\
 \text{แทนใน (1) ;} & \quad 15 = 30a + 5\left(-\frac{2}{5}\right) \\
 & \quad a = \frac{17}{30} \\
 \text{จะได้} & \quad x = \frac{17}{30}y - \frac{2}{5} \\
 \text{ขายได้ 150 ล้านบาท} & \quad \therefore y = 15 \\
 & \quad x = \frac{17}{30}(15) - \frac{2}{5} \\
 & \quad = 8.1 \\
 \text{ต้องลงทุน} & \quad = 8.1 \times 10,000 \text{ บาท} \\
 & \quad = 81,000 \text{ บาท}
 \end{aligned}$$

## 46. เฉลย b. 9

พิจารณา **1, 1, 3, 1, 3, 5, 1, 3, 5, 7, 1, 3, 5, 7, 9, ...**

เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ลำดับนี้ จะแบ่งพจน์ต่างๆ ในลำดับนี้เป็น

$\underline{1}$  ,  $\underline{1, 3}$  ,  $\underline{1, 3, 5}$  ,  $\underline{1, 3, 5, 7}$  ,  $\underline{1, 3, 5, 7, 9}$  , ...  
 กลุ่มที่ 1      กลุ่มที่ 2      กลุ่มที่ 3      กลุ่มที่ 4      กลุ่มที่ 5

จะพบว่า กลุ่มที่ 1 มี 1 พจน์

กลุ่มที่ 2 มี 2 พจน์

ให้พจน์ที่ 1280 อยู่ในกลุ่มที่ n

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{จำนวนพจน์ทั้งหมดถึงกลุ่มที่ } n & \quad = 1 + 2 + 3 + \dots + n \\
 & \quad = \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ถ้า  $n = 50$  จะได้  $\frac{50(50+1)}{2} = 1275$

ดังนั้น พจน์ที่ 1280 จะอยู่ในกลุ่มที่ 51 และเรียงอยู่ในลำดับที่ 5 ของกลุ่ม

กลุ่มที่ 51  $\underbrace{1, 3, 5, 7, 9, \dots}_{51 \text{ พจน์}}$

$$\therefore a_{1280} = 9$$



47. เฉลย ค. -1

เนื่องจาก  $P(n) - Q(n) = 0$  เมื่อ  $n = 1, 2, 3, \dots, 2009$ แสดงว่าคำตอบของสมการ  $P(x) - Q(x) = 0$  คือ  $1, 2, 3, \dots, 2009$ เนื่องจาก  $P(x)$  และ  $Q(x)$  เป็นพหุนามดีกรี 2009 จะเขียนสมการได้ในรูป

$$A(x-1)(x-2)\dots(x-2009) = P(x) - Q(x) \quad (A \text{ เป็นจำนวนจริง})$$

ถ้า  $x = 2010$  จะได้  $A(2009)(2008)(2007)\dots 1 = P(2010) - Q(2010)$ 

$$= 1$$

$$A((2009)!) = 1$$

$$A = \frac{1}{(2009)!}$$

จะได้

$$P(x) - Q(x) = \frac{1}{(2009)!} (x-1)(x-2)\dots(x-2009)$$

 $x = 0$  จะได้

$$P(0) - Q(0) = \frac{1}{(2009)!} (0-1)(0-2)\dots(0-2009)$$

$$= -\frac{(2009)!}{(2009)!}$$

$$= -1$$

48. เฉลย บ. (250-261)

เนื่องจาก  $k$  ทหารด้วย 7 แล้วเหลือเศษ 6 แสดงว่า  $k+1$  ทหารด้วย 7 ลงตัวและ  $k$  ทหารด้วย 9 แล้วเหลือเศษ 8 แสดงว่า  $k+1$  ทหารด้วย 9 ลงตัวและ  $k$  ทหารด้วย 12 แล้วเหลือเศษ 11 แสดงว่า  $k+1$  ทหารด้วย 12 ลงตัวดังนั้น  $k+1$  เป็น ค.ร.น. ของ 7, 9, 12

$$\text{ค.ร.น. ของ } 7, 9, 12 = 252$$

$$\therefore k = 251$$

49. เฉลย ค.  $\frac{9}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^5$ 

$$\text{จาก } a^{10} = b^{12} \quad \dots(1)$$

$$\text{และ } a^{2b} = b^{3a} \quad \dots(2)$$

$$a = b^{12/10} = b^{6/5}$$

แทนใน (2) ;

$$(b^{6/5})^{2b} = b^{3a}$$

$$\frac{6}{5}(2b) = 3a = 3(b^{6/5})$$

เอา  $3b$  ทหาร ;

$$\frac{4}{5} = b^{1/5}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5 = b$$

$$\therefore a = \left[\left(\frac{4}{5}\right)^5\right]^{6/5} = \left(\frac{4}{5}\right)^6$$

$$a + b = \left(\frac{4}{5}\right)^6 + \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\frac{4}{5} + 1\right)$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\frac{9}{5}\right) = \frac{9}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^5$$



50. เฉลย d. 161

$$\begin{aligned} 242 &= 243 - 1 \\ &= 3^5 - 1 \end{aligned}$$

หาร  $3^{24} + k$  ด้วย  $3^5 - 1$ 

$$\begin{array}{r} 3^{19} + 3^{14} + 3^9 + 3^4 \\ 3^5 - 1 \overline{) 3^{24} + k} \\ \underline{3^{24} - 3^{19}} \\ 3^{19} + k \\ \underline{3^{19} - 3^{14}} \\ 3^{14} + k \\ \underline{3^{14} - 3^9} \\ 3^9 + k \\ \underline{3^9 - 3^4} \\ \underline{\quad 3^4 + k} \end{array}$$

$$\therefore 3^4 + k = 3^5 - 1 = 242$$

$$k = 242 - 81 = 161$$

