PRE-9 วิชาสามัญ

เฉลยข้อสอบ

วิชาคณิตศาสตร์ 1 (พื้นฐาน+เพิ่มเติม) (รหัสวิชา 39)

เปิดสอบแบบเปเปอร์ทางอินเตอร์เน็ต ในช่วงวันที่กำหนดไว้ เท่านั้น

คำอธิบาย

1. **ข้อสอบชุดนี้** มีจำนวน 30 ข้อ คะแนนเต็ม 100 คะแนน ให้เวลารวม 1 ชั่วโมง 30 นาที
2. **นักเรียนจะต้องพยายามทำข้อสอบและจับเวลาเหมือนกับการสอบแข่งขันจริง** ห้ามใช้เวลาสอบเกินที่กำหนดและห้ามเปิดตำราดู หรือนำอุปกรณ์ช่วยในการคิดคำนวณมาใช้เด็ดขาด ทั้งนี้เพื่อประโยชน์ในการทดสอบวัดความรู้ของตัวนักเรียนเอง
3. **การประเมินผล** นักเรียนสามารถเข้ามาดูเฉลยข้อสอบอย่างละเอียดได้ **ในช่วงวันที่กำหนดไว้** ทาง **www.bunditnaenaew.com** ซึ่งจะทำให้สามารถตรวจคะแนนที่ทำได้ด้วยตนเอง

เรียนท่านผู้ปกครอง, ครู-อาจารย์ และนักเรียนทุกท่าน

หากท่านมีความคิดเห็นเพิ่มเติม หรือแตกต่างจากเฉลยข้อสอบที่โชว์ไว้นี้ ท่านสามารถแสดงความคิดเห็นให้บัณฑิตแนะแนวทราบ ได้ทั้งทางแฟกซ์อัตโนมัติ ที่หมายเลข 02-6171820 และทางเว็บไซต์ (โดยคลิกที่ปุ่มเลือกแสดงความคิดเห็นในฟอร์มเลือกดูเฉลยข้อสอบแต่ละวิชา) ทีมงานบัณฑิตแนะแนวขอขอบพระคุณในความคิดเห็นของท่านล่วงหน้า และจะนำไปปรับปรุงการทำงานให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้นต่อไป

เฉลยข้อสอบ PRE-9 วิชาสามัญ (ทาง INTERNET)
วิชาคณิตศาสตร์ 1 (พื้นฐาน+เพิ่มเติม) รหัสวิชา 39

ตอนที่ 1

1. 4)	**2.** 4)	**3.** 3)	**4.** 4)	**5.** 3)	**6.** 4)	**7.** 3)	**8.** 1)	**9.** 2)	**10.** 3)
11. 1)	**12.** 1)	**13.** 1)	**14.** 4)	**15.** 1)	**16.** 2)	**17.** 1)	**18.** 3)	**19.** 3)	**20.** 1)

ตอนที่ 2

21. 3)	**22.** 1)	**23.** 2)	**24.** 4)	**25.** 3)	**26.** 2)	**27.** 2)	**28.** 4)	**29.** 1)	**30.** 2)

ตอนที่ 1

1. **เฉลย 4)** $-(2^{33}+1)$

จากโจทย์กำหนด $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1$

จาก $a_{n+3} = -2a_n \quad \therefore \quad a_4 = -2a_1,\ a_5 = -2a_2,\ a_6 = -2a_3$

จะได้ $a_1 + a_2 + a_3 - 2a_1 - 2a_2 - 2a_3 = 1$

$$\therefore \quad a_1 + a_2 + a_3 = -1 \qquad \ldots(1)$$

คูณด้วย -2 ; $-2a_1 - 2a_2 - 2a_3 = 2$

$$a_4 + a_5 + a_6 = 2 \qquad \ldots(2)$$

คูณด้วย -2 ; $-2a_4 - 2a_5 - 2a_6 = -4$

$$a_7 + a_8 + a_9 = -4 \qquad \ldots(3)$$

$$\vdots$$

$$a_{97} + a_{98} + a_{99} = -2^{32} \qquad \ldots(33)$$

(1) + (2) + (3) + ... + (33) ;

$$(a_1 + a_2 + a_3) + \ldots + (a_{97} + a_{98} + a_{99}) = -1 + 2 - 4 + \ldots - 2^{32}$$

$$\sum_{n=1}^{99} a_n = \frac{-1(1-(-2)^{33})}{1-(-2)} = \frac{2^{33}+1}{-3}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{99} 3a_n = 3\sum_{n=1}^{99} a_n = 3\left(\frac{2^{33}+1}{-3}\right) = -(2^{33}+1)$$

2. เฉลย 4) $2\sqrt{3}$ หน่วย

จากโจทย์ $x^2 + y^2 = 4$ จะได้ $x^2 = 4 - y^2$

$$x^2 + 2y = (4 - y^2) + 2y = -y^2 + 2y + 4$$

ให้ $f(y) = -y^2 + 2y + 4$

จะหา**ค่าสูงสุด**หรือ**ต่ำสุด** โดยหา y ที่ทำให้ $f'(y) = 0$

$\because \quad f'(y) = -2y + 2 = 0$

$\therefore \quad y = 1$

$\because \quad f''(y) = -2 \rightarrow f''(1) = -2 < 0$

ดังนั้น เมื่อ $y = 1$ ทำให้ $f(y)$ มี**ค่าสูงสุด**

หาค่า x โดยแทนค่า $y = 1$ ในสมการ $x^2 = 4 - y^2$ จะได้ $x^2 = 4 - 1^2 = 3$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

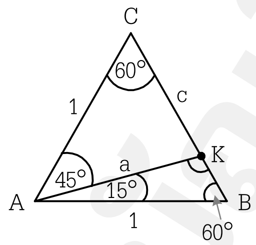
$\therefore$ จุดใน $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ ที่ทำให้ $x^2 + 2y$ มี**ค่าสูงสุด** คือ $(-\sqrt{3}, 1)$ และ $(\sqrt{3}, 1)$

$\therefore \quad |(-\sqrt{3}, 1) - (\sqrt{3}, 1)| = 2\sqrt{3}$

3. เฉลย 3) $\dfrac{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{2}$

วิธีที่ 1 สมมติให้แต่ละด้านของ Δ ABC ยาว 1 หน่วย $\left(\text{อัตราส่วน } \dfrac{AK}{AB} \text{ ไม่ขึ้นกับหน่วยวัด}\right)$

ให้ a แทนความยาวของด้าน AK และ c แทนความยาวของด้าน CK



จากรูป $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{a}{1} = a$

หา a โดยอาศัยกฎของโคไซน์ ดังนี้

$$a^2 = 1 + c^2 - 2c\cos 60^\circ$$
$$= 1 + c^2 - c$$
$$c^2 = 1 + a^2 - 2a\cos 45^\circ$$
$$= 1 + a^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}a$$

เนื่องจาก $c = \sqrt{1 + a^2 - \dfrac{2}{\sqrt{2}}a}$ จะได้

$$a^2 = 1 + \left(1 + a^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}a\right) - \sqrt{1 + a^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}a}$$

$$0 = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}a - \sqrt{1 + a^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}a}$$

แก้สมการเพื่อหา a ;

$$\sqrt{1+a^2-\frac{2}{\sqrt{2}}a} = 2-\frac{2}{\sqrt{2}}a$$

$$1+a^2-\frac{2}{\sqrt{2}}a = 4-\frac{8}{\sqrt{2}}a+2a^2$$

$$0 = 3-\frac{6}{\sqrt{2}}a+a^2$$

$$a = \frac{\frac{6}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{36}{2}-4(1)(3)}}{2}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{18-12}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$$

$\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6}) > 1$ เป็นค่าของ a ไม่ได้ เพราะว่า $a < 1$ (K อยู่บนคอร์ดของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง A และรัศมี 1)

ดังนั้น

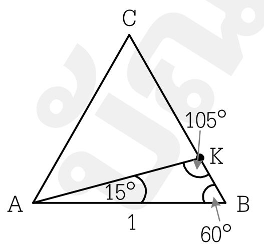
$$a = \frac{1}{2}(3\sqrt{2}-\sqrt{6})$$

$$= \frac{1}{2}(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\sqrt{2})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(3-\sqrt{3})$$

วิธีที่ 2 กฎของ sine ;

$$\frac{AK}{\sin 60^\circ} = \frac{AB}{\sin 105^\circ}$$



$$\frac{AK}{AB} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 105^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(3-\sqrt{3})$$

4. เฉลย 4) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

พิจารณา $f(x) = \frac{1}{1+x} \rightarrow f^2(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} \rightarrow f^{\infty}(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}$

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}$$

$$L = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}} \quad \rightarrow \quad L = \frac{1}{1+L}$$

$$L^2 + L - 1 = 0$$

$$L = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

แต่ $L \in \mathbf{R}^+ \quad \therefore \quad L = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

5. เฉลย 3) ก. เท็จ และ ข. จริง

ก. **เท็จ**

พิจารณา $\forall x \exists y[x^2y^2 + xy - 4 \neq 0]$

ไม่ว่าเลือก x เป็นจำนวนใด สามารถเลือก y = 0

ที่ทำให้ $x^2y^2 + xy + 4 = x^2 \cdot 0^2 + x \cdot 0 - 4 = -4 \neq 0$

ดังนั้น $\forall x \exists y[x^2y^2 + xy - 4 \neq 0]$ เป็นจริง

จะได้ $\exists x \forall y[x^2y^2 + xy - 4 = 0]$ เป็น**เท็จ**

ข. **จริง**

พิจารณา $x^2y^2 + xy - 4 = 0$

จะได้ $y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4x^2(-4)}}{2x^2}$

$= \frac{-x \pm \sqrt{17x^2}}{2x^2}$

$\therefore$ จะหาค่า y ได้เสมอ เมื่อ $x \neq 0$

จึงได้ว่า $\forall x \exists y[x \neq 0 \rightarrow x^2y^2 + xy - 4 = 0]$ เป็น**จริง**

6. เฉลย 4) $\sqrt{13}$

อาศัยทฤษฎีบทหนึ่งเกี่ยวกับผลบวกของไซน์และโคไซน์ ซึ่งมีสาระดังนี้

ถ้า A และ B เป็นจำนวนจริงแล้ว

$$A \sin \theta + B \cos \theta = k \sin (\theta + \phi)$$

เมื่อ $k = \sqrt{A^2 + B^2}$ = **ค่าสูงสุด**เสมอ

และ ϕ สอดคล้องกับระบบสมการ $\cos \phi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ และ $\sin \phi = \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

สำหรับการเขียน $3 \cos \theta - 2 \sin \theta$ ในรูปของ $k \sin (\theta + \phi)$ เราใช้ $k = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

และ ϕ ซึ่ง $\cos \phi = \dfrac{-2}{\sqrt{13}}$ และ $\sin \phi = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

จะได้ $3 \cos \theta - 2 \sin \theta = \sqrt{13} \cos (\theta + \phi)$

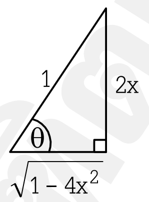
เนื่องจาก $-1 \leq \cos (\theta + \phi) \leq 1$

ดังนั้น $3 \cos \theta - 2 \sin \theta$ มี**ค่าสูงสุด**เท่ากับ $\sqrt{13}$ เมื่อ $\theta = -\phi$

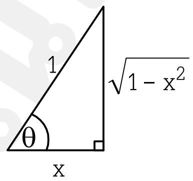
7. เฉลย 3) $\dfrac{5 + 2\sqrt{2}}{34}$

$$\sin [\arcsin (2x) - \arccos x] = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sin [\arcsin (2x)] \cos [\arccos (x)] - \cos [\arcsin (2x)] \sin [\arccos x] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$\rightarrow \cos [\arcsin (2x)] = \sqrt{1 - 4x^2}$



$\rightarrow \sin [\arccos x] = \sqrt{1 - x^2}$

จะได้

$$\begin{aligned}
(2x)(x) - \sqrt{1 - 4x^2}\,\sqrt{1 - x^2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
2x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} &= \sqrt{1 - 4x^2}\,\sqrt{1 - x^2} \\
4x^4 - 2\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2} &= (1 - 4x^2)(1 - x^2) \\
4x^4 - 2\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2} &= 1 - 5x^2 + 4x^4 \\
(5 - 2\sqrt{2})x^2 &= \frac{1}{2} \\
x^2 &= \frac{1}{2(5 - 2\sqrt{2})} \\
&= \frac{5 + 2\sqrt{2}}{2(25 - 8)} = \frac{5 + 2\sqrt{2}}{34}
\end{aligned}$$

8. เฉลย 1) $-12 < c < -4$

เริ่มต้นโดยแก้สมการที่กำหนดให้แล้วดูว่ามีเงื่อนไขอะไรเกิดขึ้นกับ c

เนื่องจาก $8x^2 - 32x - 8c = 8(x^2 - 4x - c)$ เราให้ $y = x^2 - 4x - c$ สมการที่กำหนดให้จะกลายเป็น

$$y - \sqrt{8y} = 0 \qquad ...(*)$$
$$y = \sqrt{8y}$$
$$y^2 = 8y$$
$$y(y - 8) = 0$$

จะได้ $y = x^2 - 4x - c = 0$ หรือ $y = x^2 - 4x - c = 8$

I พิจารณาสมการ $x^2 - 4x - c = 0$ ดิสคริมิแนนต์ของสมการนี้คือ $(-4)^2 - 4(-c) = 16 + 4c$
ใช้ดิสคริมิแนนต์หาเงื่อนไขเกี่ยวกับจำนวนรากของสมการ จะได้ว่า

สมการนี้ ไม่มีรากที่เป็นจำนวนจริง เมื่อ $16 + 4c < 0$ หรือเมื่อ $c < -4$

มีรากที่เป็นจำนวนจริง 1 ค่า เมื่อ $16 + 4c = 0$ หรือเมื่อ $c = -4$

มีรากที่เป็นจำนวนจริง 2 ค่า เมื่อ $16 + 4c > 0$ หรือเมื่อ $c > -4$

II พิจารณาสมการ $x^2 - 4x - c = 8$ หรือ $x^2 - 4x - (c + 8) = 0$: ดิสคริมิแนนต์ของสมการนี้คือ $(-4)^2 - 4(-(c + 8)) = 48 + 4c$

สมการนี้ ไม่มีรากที่เป็นจำนวนจริง เมื่อ $48 + 4c < 0$ หรือเมื่อ $c < -12$

มีรากที่เป็นจำนวนจริง 1 ค่า เมื่อ $48 + 4c = 0$ หรือเมื่อ $c = -12$

มีรากที่เป็นจำนวนจริง 2 ค่า เมื่อ $48 + 4c > 0$ หรือเมื่อ $c > -12$

สังเกตว่าค่าของ x ที่เป็นรากของสมการหนึ่งจะไม่เป็นรากของอีกสมการหนึ่ง เพราะ $x^2 - 4x - c$ ไม่สามารถจะเท่ากับ 0 และ 8 พร้อมกัน พิจารณาจำนวนรากที่เป็นจำนวนของแต่ละสมการในแต่ละช่วงของค่าของ c ดังนี้

	$c < -12$	$c = -12$	$-12 < c < -4$	$c = -4$	$c > -4$
$x^2 - 4x - c = 0$	0	0	0	1	2
$x^2 - 4x - c = 8$	0	1	2	2	2
ผลรวมจำนวนรากจริง	0	1	2	3	4

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้มีรากที่เป็นจำนวนจริงที่**แตกต่าง**กัน 2 ค่า เมื่อ $-12 < c < -4$

9. เฉลย 2) $\frac{7}{13}$

พิจารณา $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 27$

สมมติ $A = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ จะได้ $A^3 = 27$

$$A^3 - 27 = 0$$

$$(A-3)(A^2+3A+9) = 0$$

$\therefore\ A = 3$ หรือ $A = \frac{-3+3\sqrt{3}\,i}{2}$ หรือ $A = \frac{-3-3\sqrt{3}\,i}{2}$

ถ้า $A = 3$; $\frac{z-1}{z+1} = 3 \rightarrow z = -2$ ซึ่ง $\text{Im}(z) = 0$

ถ้า $A = \frac{-3+3\sqrt{3}\,i}{2}$; $\frac{z-1}{z+1} = \frac{-3+3\sqrt{3}\,i}{2}$

$$2z - 2 = -3z + 3\sqrt{3}\,iz - 3 + 3\sqrt{3}\,i$$

$$(5 - 3\sqrt{3}\,i)z = -1 + 3\sqrt{3}\,i$$

$$\therefore\ z = \frac{-1+3\sqrt{3}\,i}{5-3\sqrt{3}\,i}$$

ถ้า $A = \frac{-3-3\sqrt{3}\,i}{2}$; $\frac{z-1}{z+1} = \frac{-3-3\sqrt{3}\,i}{2}$

$$2z - 2 = -3z - 3\sqrt{3}\,iz - 3 - 3\sqrt{3}\,i$$

$$(5 + 3\sqrt{3}\,i)z = -1 - 3\sqrt{3}\,i$$

$$\therefore\ z = \frac{-1-3\sqrt{3}\,i}{5+3\sqrt{3}\,i}$$

ให้ $z_1 = \frac{-1+3\sqrt{3}\,i}{5-3\sqrt{3}\,i}$; $z_2 = \frac{-1-3\sqrt{3}\,i}{5+3\sqrt{3}\,i}$

จะได้
$$z_1z_2 = \frac{-1+3\sqrt{3}\,i}{5-3\sqrt{3}\,i} \cdot \frac{-1-3\sqrt{3}\,i}{5+3\sqrt{3}\,i}$$

$$= \frac{28}{52}$$

$$= \frac{7}{13}$$

10. เฉลย 3) $-\frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|2\sin x| + \tan x}{\sin x + 2\tan x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2\sin x + \tan x}{\sin x + 2\tan x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-2\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x + \frac{2\sin x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(\sin x)\left(-2 + \frac{1}{\cos x}\right)}{(\sin x)\left(1 + \frac{2}{\cos x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-2 + \frac{1}{\cos x}}{1 + \frac{2}{\cos x}}$$

$$= \frac{-2 + \frac{1}{\cos 0}}{1 + \frac{2}{\cos 0}} = \frac{-2 + \frac{1}{1}}{1 + \frac{2}{1}}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^-} \frac{|2\sin x| + \tan x}{\sin x + 2\tan x} = -\frac{1}{3}$$

11. เฉลย 1) $\frac{15}{128}$

แซมเปิลสเปซประกอบด้วยผลลัพธ์ที่แตกต่างกัน 2^{10} ผลลัพธ์

จำนวนวิธีเกิดหัว 3 ครั้ง เท่ากับจำนวนวิธีเลือก 3 สิ่งจาก 10 สิ่ง (นั่นคือเลือกว่าใน 10 ครั้ง จะให้เป็นหัว 3 ครั้ง ใดบ้าง) ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะเกิดหัว 3 ครั้งเท่ากับ $C_{10,\ 3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\times 9\times 8}{1\times 2\times 3} = 2^3 \times 15$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้หัว 3 ครั้ง เท่ากับ $\frac{2^3\times 15}{2^{10}} = \frac{15}{2^7} = \frac{15}{128}$

12. เฉลย 1) $\frac{11}{3}$

ข้อมูล	ความถี่สะสม	ความถี่
1	$F(1) = 1^2 + 1 = 2$	2
2	$F(2) = 2^2 + 2 = 6$	$6 - 2 = 4$
3	$F(3) = 3^2 + 3 = 12$	$12 - 6 = 6$
4	$F(4) = 4^2 + 4 = 20$	$20 - 12 = 8$
5	$F(5) = 5^2 + 5 = 30$	$30 - 20 = 10$

$$\therefore \bar{x} = \frac{(1)(2) + (2)(4) + (3)(6) + (4)(8) + (5)(10)}{30}$$

$$= \frac{2 + 8 + 18 + 32 + 50}{30} = \frac{110}{30} = \frac{11}{3}$$

13. เฉลย 1) $\frac{31}{49}$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos(\theta+\theta)\\ &= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta\\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\\ &= (\cos^2\theta + \mathbf{sin^2}\,\theta) - \mathbf{sin^2}\,\theta - \sin^2\theta\\ &= 1 - 2\sin^2\theta\\ &= 1 - 2\left(\frac{3}{7}\right)^2\\ &= \frac{31}{49}\end{aligned}$$

14. เฉลย 4) 4π

พิจารณา
$$\begin{aligned}4(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)(1+\cos^2\theta) &= 3\\ 4(1-\sin^2\theta)(1+\cos^2\theta) - 3 &= 0\\ 4\cos^2\theta(1+\cos^2\theta) - 3 &= 0\\ 4\cos^2\theta + 4\cos^4\theta - 3 &= 0\\ (2\cos^2\theta - 1)(2\cos^2\theta + 3) &= 4\\ \cos^2\theta &= \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\end{aligned}$$
(ค่าลบไม่ใช้เพราะ $\cos^2\theta \geq 0$)
$$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ เซตคำตอบคือ $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

และผลบวกของสมาชิกในเซตเท่ากับ $\frac{\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi}{4} = 4\pi$

15. เฉลย 1) $\frac{1}{2}$

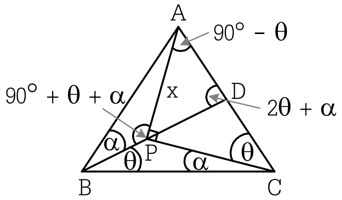
$$\frac{1}{2+\log_a b^2c^2} = \frac{1}{\log_a a^2 + \log_a b^2c^2} = \frac{1}{\log_a a^2b^2c^2} = \frac{1}{2\log_a abc} = \frac{\log a}{2\log abc}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\frac{1}{2+\log_b a^2c^2} = \frac{\log b}{2\log abc}$ และ $\frac{1}{2+\log_c a^2b^2} = \frac{\log c}{2\log abc}$

จากโจทย์จะได้

$$\frac{1}{2+\log_a b^2c^2} + \frac{1}{2+\log_b a^2c^2} + \frac{1}{2+\log_c a^2b^2} = \frac{\log a + \log b + \log c}{2\log abc} = \frac{\log abc}{2\log abc} = \frac{1}{2}$$

16. เฉลย 2) 1 : 2



ให้ $A\hat{B}P = B\hat{C}P = \alpha$ และ $A\hat{C}P = \theta$

จะได้ $P\hat{B}C = \theta$ เพราะมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน

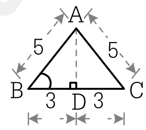
$P\hat{A}C = 90^\circ - \theta,\ A\hat{D}P = P\hat{B}C + D\hat{C}B = 2\theta + \alpha$

และ $A\hat{P}B = P\hat{A}C + A\hat{D}P = 90^\circ + \theta + \alpha$

Δ APC ; $\sin\theta = \frac{AP}{AC} = \frac{AP}{5} \Rightarrow AP = 5\sin\theta$ .... (*)

ใช้กฎของไซน์กับ Δ ABP จะได้

$$\frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{5}{\sin(90^\circ + \theta + \alpha)} = \frac{5}{\cos(\theta + \alpha)} = \frac{5}{\cos(A\hat{B}C)} = \frac{5}{\frac{3}{5}}$$



$AD = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$\cos A\hat{B}C = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{5}$

$$\frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{25}{3} \quad \text{.. (**)}$$

แทน (*) ใน (**) จะได้
$$\frac{5\sin\theta}{\sin\alpha} = \frac{25}{3}$$
$$3\sin\theta = 5\sin\alpha$$
$$3\sin\theta = 5\sin(A\hat{B}C - \theta)$$
$$3\sin\theta = 5\sin(A\hat{B}C)\cos\theta - 5\cos(A\hat{B}C)\sin\theta$$
$$3\sin\theta = 4\cos\theta - 3\sin\theta$$
$$6\sin\theta = 4\cos\theta$$
$$\tan\theta = \frac{2}{3}$$

หาอัตราส่วนของ AD ต่อ DC โดยใช้พิกัดบนระนาบจำนวนจริง

ให้ B มีพิกัด (0, 0) และ C มีพิกัด (6, 0) จะได้ว่า A มีพิกัด (3, 4) เพราะว่าส่วนสูงจาก A ถึง BC มีความยาว 4 หน่วย

เนื่องจาก $\tan\theta = \frac{2}{3}$ เส้นตรงจาก B ถึง D มีสมการเป็น $y = \frac{2}{3}x$ และเส้นตรงจาก A ถึง C มีสมการเป็น $y = -\frac{4}{3}(x - 6)$ เราสามารถหา D ได้โดยหาจุดตัดของเส้นตรงคู่ดังกล่าว

$$\frac{2}{3}x = -\frac{4}{3}x + 8$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

ดังนั้น จุด D มีพิกัด $\left(4, \frac{8}{3}\right)$ เนื่องจากพิกัด x ของ D คือ 4 อยู่ห่างจากพิกัด x ของ A (คือ 3) เป็นระยะ $\frac{1}{3}$ ของระยะระหว่างพิกัด x ของ A (คือ 3) และของ C (คือ 6) ดังนั้น AD : DC = 1 : 2

17. เฉลย 1) $\dfrac{-2(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{4-\sqrt{10}}$

$$\because \ |\bar{u}| = \sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \ \bar{u} = (1,1,-2) = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\therefore \ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{6}} \rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{-2}{\sqrt{6}} \rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\therefore \ \alpha+\beta+\gamma = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= \arctan(\sqrt{5})+\arctan(\sqrt{5})+\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{-2}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}\sqrt{5}}\right)+\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{-2}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{2\sqrt{5}}{-4}\right)+\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{-2}\right)$$

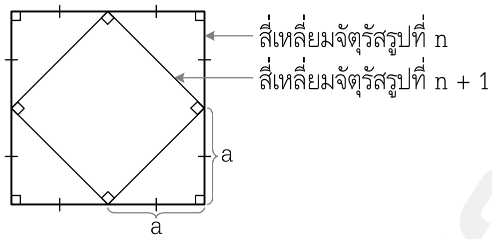
$$= \arctan\left(\frac{\frac{2\sqrt{5}}{-4}+\frac{\sqrt{2}}{-2}}{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{-4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{-2}\right)}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{-2(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{4}}{1-\frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{4}}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{-2(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{4-\sqrt{10}}\right)$$

$$\therefore \ \tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{-2(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{4-\sqrt{10}}$$

18. เฉลย 3) $40 + 20\sqrt{2}$ หน่วย

พิจารณารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ n และ n + 1



พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ n + 1 = พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ n – พื้นที่รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 4 รูป

$$= (2a)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\right) = 2a^2$$

จะเห็นว่า พื้นที่ของรูปที่ n + 1 = $2a^2$ และพื้นที่ของรูปที่ n = $(2a)^2 = 4a^2$

นั่นคือ พื้นที่ในรูปที่สร้างขึ้นใหม่จะมีขนาดเป็น $\frac{1}{2}$ เท่าของพื้นที่ในรูปเดิม

เนื่องจากรูปที่ 1 มีเส้นทแยงมุมยาว 10 หน่วย ดังนั้นมีพื้นที่ $\frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$ หน่วย^2

จะได้ รูปที่ 2 มีพื้นที่ 25 หน่วย^2 รูปที่ 3 มีพื้นที่ 12.5 หน่วย^2 ...

โดยสรุปเป็นตารางได้ดังนี้

รูปที่	1	2	3	...	n	...
พื้นที่	50	25	12.5	...	$\frac{50}{2^{n-1}}$	...
ความยาวด้าน	$\sqrt{50}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{12.5}$	...	$\sqrt{\frac{50}{2^{n-1}}}$	...
ความยาวเส้นรอบรูป (A_n)	$4\sqrt{50}$	$4\sqrt{25}$	$4\sqrt{12.5}$	...	$4\sqrt{\frac{50}{2^{n-1}}}$	...

โดย A_n หาได้จาก $A_n = 4\sqrt{\text{พื้นที่รูปที่ n}}$

จะเห็นว่า $\{A_n\}$ เป็นลำดับเรขาคณิต ที่มี $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ดังนั้น $$A_2 + A_3 + A_4 + \cdots = \frac{4\sqrt{25}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 40 + 20\sqrt{2} \text{ หน่วย}$$

19. เฉลย 3) $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (0, \infty)$

แยกพิจารณาเป็น 4 กรณี

กรณีที่ 1 ; $x + 1 \geq 0$ และ $2x + 1 \geq 0$

กรณีนี้ $x \geq -1$ และ $x \geq -\frac{1}{2}$ นั่นคือ $x \geq -\frac{1}{2}$

$$|x + 1| < |2x + 1|$$
$$x + 1 < 2x + 1$$
$$x > 0$$

ได้คำตอบจากกรณีนี้เป็น $x > 0$

กรณีที่ 2 ; $x + 1 \geq 0$ และ $2x + 1 < 0$

กรณีนี้ $x \geq -1$ และ $x < -\frac{1}{2}$ นั่นคือ $-1 \leq x < -\frac{1}{2}$

$$|x + 1| < |2x + 1|$$
$$x + 1 < -(2x + 1)$$
$$3x < -2$$
$$x < -\frac{2}{3}$$

แต่ $-1 \leq x < -\frac{1}{2}$ ดังนั้นได้คำตอบจากกรณีนี้เป็น $-1 \leq x < -\frac{2}{3}$

กรณีที่ 3 ; $x + 1 < 0$ และ $2x + 1 \geq 0$

กรณีนี้ $x < -1$ และ $x \geq -\frac{1}{2}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 4 ; $x + 1 < 0$ และ $2x + 1 < 0$

กรณีนี้ $x < -1$ และ $x < -\frac{1}{2}$ นั่นคือ $x < -1$

$$|x + 1| < |2x + 1|$$
$$-(x + 1) < -(2x + 1)$$
$$x < 0$$

แต่ $x < -1$ ดังนั้นได้คำตอบจากกรณีนี้เป็น $x < -1$

สรุปว่า เซตคำตอบของอสมการที่กำหนดให้ คือ

$(0, \infty) \cup \left[-1, -\frac{2}{3}\right) \cup \phi \cup (-\infty, -1)$ หรือ $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (0, \infty)$

20. เฉลย 1) U อาจเป็น {0, 1, 2, 3}

พิจารณาค่าความจริงของ $\sim\{[(p \to q) \wedge p] \to q\}$ โดยสร้างตาราง จะได้ดังนี้

p	q	$(p \to q)$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p] \to q$	$\sim\{[p \to q] \wedge p\} \to q$
T	T	T	T	T	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F

$\therefore$ $\sim\{[(p \to q) \wedge p] \to q\}$ เป็นเท็จเสมอ จึงต้องหา U ที่ทำให้ $\forall x \exists y[x|y]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ พบว่า U = {0, 1, 2, 3} เมื่อ x = 0 จะไม่มี y ตัวใดที่ $0|y$ ดังนั้น U = {0, 1, 2, 3} ทำให้ $\forall x \exists y[x|y]$ เป็นเท็จ (สำหรับ U ในตัวเลือก 2), 3) และ 4) สามารถเลือก y ให้มีค่าเท่ากับ x ได้เสมอ)

ตอนที่ 2

21. เฉลย 3) 2

ให้ $y = \ln x$ สมการที่กำหนดให้จะกลายเป็น

$$y^4 + y^2 = 2$$
$$y^4 + y^2 - 2 = 0$$

ให้ $z = y^2$ จะได้ $z^2 + z - 2 = 0$

$$(z + 2)(z - 1) = 0$$
$$z = -2 \text{ หรือ } z = 1$$

แต่ $z = y^2 \geq 0$ ดังนั้นเป็นไปไม่ได้ที่ $z = -2$ นั่นคือ $z = 1$ และจะได้ $y = 1$ หรือ -1

ดังนั้น $x = e$ หรือ $x = e^{-1}$

สรุปว่า สมการที่กำหนดให้มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง 2 จำนวน

22. เฉลย 1) 0.10

$\sum_{i=1}^{7} |x_i - a|$ มีค่า**น้อยสุด** เมื่อ a = Med = 1.1

$\sum_{i=1}^{7} (x_i - b)^2$ มีค่า**น้อยสุด** เมื่อ $b = \bar{x} = \frac{1 + 1.1 + 1.1 + 1.1 + 1.3 + 1.3 + 1.5}{7} = 1.2$

$\therefore$ $|a - b| = |1.1 - 1.2| = 0.1$

23. เฉลย 2) 39

พิจารณา $\mathbf{a + 2 \mid a^4 + 8}$

เนื่องจาก $a + 2 \mid a^4 - 16$ ดังนั้น $a + 2 \mid (a^4 + 8) - (a^4 - 16)$

$a + 2 \mid 24$

นั่นคือ $a + 2 = -24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

$a = -26, -14, ..., 10, 22$

จะได้ $a = 22$

พิจารณา $\mathbf{b - 3 \mid 5(b^2 - 5)}$

เนื่องจาก $b - 3 \mid 5(b^2 - 9)$ ดังนั้น $b - 3 \mid 5(b^2 - 5) - 5(b^2 - 9)$

$b - 3 \mid 20$

นั่นคือ $b - 3 = -20, -10, -5, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 10, 20$

$b = -17, -7, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 13, 23$

จะได้ $b = -17$

ดังนั้น $a - b = 22 - (-17)$

$= 39$

24. เฉลย 4) 3

จะได้ว่า $a_{11}(A) = (1)(1) = 1$ $\quad a_{12}(A) = 1 + 2 = 3$

$a_{21}(A) = 2 + 1 = 3$ $\quad a_{22}(A) = (2)(2) = 4$

จาก $AX = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} = B$

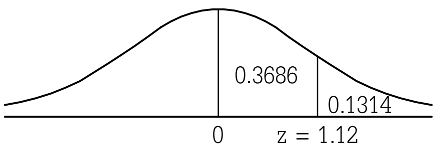
$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 11 \end{aligned}\right\}$ แก้สมการได้ $x_1 = 1, x_2 = 2$

ดังนั้น $x_1 + x_2 = 1 + 2 = 3$

25. เฉลย 3) 8

มีผู้ได้คะแนนสอบ**มากกว่า**นาย ก. อยู่ 13.14% แสดงว่า $P(\bar{x} < x < x_ก) = 0.5 - 0.1314 = 0.3686$

จากตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งมาตรฐานจะได้ว่าคะแนนสอบของนาย ก. ($x_ก$) ตรงกับคะแนนมาตรฐาน 1.12



จากสูตร $z = \dfrac{x_ก - \bar{x}}{S}$

แทนค่า $1.12 = \dfrac{70.56 - 61.60}{S}$

$\therefore S = 8$

26. เฉลย 2) 154

$$\begin{aligned}
n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\
&\quad + n(A \cap B \cap C) \\
n(A \cup B \cup C) + n(A) + n(B) + n(C) &= [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] + [n(B) + n(C) - n(B \cap C)] \\
&\quad + [n(C) + n(A) - n(C \cap A)] + n(A \cap B \cap C) \\
&= n(A \cup B) + n(B \cup C) + n(C \cup A) + n(A \cap B \cap C) \\
&= 59 + 44 + 36 + 15 = 154
\end{aligned}$$

27. เฉลย 2) 26

เนื่องจาก $n \in N$ ดังนั้น $n \geq 1$

กรณีที่ 1 : $1 \leq n \leq 2$ จะได้

$$\begin{aligned}
98 &< (4 - n) + (n + 3) - (2 - n) \leq 124 \\
98 &< 5 + n \leq 124 \\
93 &< n \leq 119
\end{aligned}$$

ซึ่งไม่อยู่ใน $1 \leq n \leq 2$

กรณีที่ 2 : $2 < n \leq 4$ จะได้

$$\begin{aligned}
98 &< (4 - n) + (n + 3) - (n - 2) \leq 124 \\
98 &< 9 - n \leq 124 \\
-115 &\leq n < -89
\end{aligned}$$

ซึ่งไม่อยู่ใน $2 < n \leq 4$

กรณีที่ 3 : $4 < n$ จะได้

$$\begin{aligned}
98 &< (n - 4) + (n + 3) - (n - 2) \leq 124 \\
98 &< n + 1 \leq 124 \\
97 &< n \leq 123
\end{aligned}$$

ซึ่งอยู่ในช่วง $4 < n$

ดังนั้น จากทั้ง 3 กรณีจะได้คำตอบ คือ $97 < n \leq 123$ แต่ n เป็นจำนวนนับ ดังนั้นเซตคำตอบ คือ {98, 99, ..., 123} ซึ่งมีสมาชิกทั้งหมด 26 จำนวน

28. เฉลย 4) 394

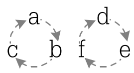
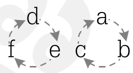
เนื่องจากโต๊ะกลมทั้ง 2 ตัวเหมือนกันจึงพิจารณาจัดคน 6 คนนั่งโต๊ะแต่ละตัวเป็นกรณีย่อยๆ ดังนี้

กรณีที่ 1 โต๊ะตัวหนึ่งมี 6 คน อีกตัวหนึ่งมี 0 คน นั่งได้ $\binom{6}{6}(6-1)! = 120$ วิธี

กรณีที่ 2 โต๊ะตัวหนึ่งมี 5 คน อีกตัวหนึ่งมี 1 คน นั่งได้ $\binom{6}{5}(5-1)!\binom{1}{1}(1-1)! = 144$ วิธี

กรณีที่ 3 โต๊ะตัวหนึ่งมี 4 คน อีกตัวหนึ่งมี 2 คน นั่งได้ $\binom{6}{4}(4-1)!\binom{2}{2}(2-1)! = 90$ วิธี

กรณีที่ 4 โต๊ะตัวหนึ่งมี 3 คน อีกตัวหนึ่งมี 3 คน นั่งได้ $\frac{1}{2}\binom{6}{3}(3-1)!\binom{3}{3}(3-1)! = 40$ วิธี

กรณีนี้หารด้วย 2 เพื่อไม่ให้นับซ้ำ เพราะเมื่อ (a, b, c) ถูกเลือกขณะคำนวณ $\binom{6}{3}(3-1)!$ และ (d, e, f) ถูกเลือกขณะคำนวณ $\binom{3}{3}(3-1)!$ เป็นเหตุการณ์เดียวกัน เพราะโต๊ะเหมือนกัน กล่าวคือ  เหมือนกับ 

$\therefore$ จัดคน 6 คนนั่งได้ทั้งหมด 120 + 144 + 90 + 40 = 394 วิธี

29. เฉลย 1) 438

$$
\begin{aligned}
\because \quad \bar{x} &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{19}}{19} = \frac{\sum_{i=1}^{19} a_i}{19} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{19} (i^2 + 2i)}{19} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{19} i^2 + 2\sum_{i=1}^{19} i}{19} \\
&= \frac{\frac{19(20)(39)}{6} + \frac{2(19)(20)}{2}}{19} \\
&= 150
\end{aligned}
$$

ตำแหน่ง $P_{80} = \frac{80}{100}(19+1) = 16$

เนื่องจาก $a_1 < a_2 < \dots < a_{19}$ ดังนั้น $P_{80} = a_{16} = 16^2 + 2(16) = 288$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad \bar{x} + P_{80} &= 150 + 288 \\
&= 438
\end{aligned}
$$

30. เฉลย 2) 6

จากนาย ก และนาย ข สรุปได้ว่า “ทีม A ทำคะแนนแบบ 2 คะแนน**มากกว่า** 5 ครั้ง และทำคะแนนแบบ 3 คะแนน**มากกว่า** 4 ครั้ง” และจากข้อสรุปที่ได้จากนาย ค จึงได้ว่าทีม A ทำได้ 27 คะแนน

ให้ x เป็นจำนวนครั้งที่ทีม A ทำคะแนนแบบ 2 คะแนนต่อ 1 ลูก

y เป็นจำนวนครั้งที่ทีม A ทำคะแนนแบบ 3 คะแนนต่อ 1 ลูก

$\therefore\ 2x + 3y = 27$; $x > 5$ และ $y > 4$

จะเห็นว่า ถ้า y เป็นจำนวนคู่ จะหาค่า x **ไม่ได้**

$\therefore\ y$ อาจเป็น 5, 7, 9, ...

แต่เมื่อ $y = 7, 9, \ldots$ จะได้ $x < 5$ ซึ่งขัดแย้งกับโจทย์

$\therefore\ y = 5$ และ $2x + 3(5) = 27$

$x = 6$