นสพ.เดลินิวส์ ฉบับวันพุธที่ 24 ธันวาคม 2557

ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย

เพื่อเตรียมสอบ O-NET และ 7 วิชาสามัญ

วิชาคณิตศาสตร์

ชุดที่ 2 (ตอนที่ 5/11)

โดยช่วงตั้งแต่ 25 พ.ย. 57 - 6 ก.พ. 58 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้
วันอังคารดูวิชาอังกฤษ, วันพุธดูวิชาคณิต, วันพฤหัสดูวิชาวิทย์, วันศุกร์ดูวิชาไทย+สังคม

ส่วนที่ 1 : เตรียมสอบ O-NET

1. ให้ P เป็นผลบวกของอนุกรมเลขคณิตของจำนวนคี่ตั้งแต่ 17–253 และ
Q เป็นผลบวกของอนุกรมเลขคณิตของจำนวนคู่ตั้งแต่ 3–201
จงหาว่า P – Q มีค่าเท่าใด

1) 5967　2) 5865　3) –5967　4) –5865

2. ความน่าจะเป็นที่รางวัลเลขท้ายสองตัวจะมีผลรวมของเลขแต่ละหลักเป็นจำนวนเฉพาะที่**น้อยกว่า** 11 เท่ากับข้อใด

1) $\frac{9}{50}$　2) $\frac{1}{5}$　3) $\frac{21}{100}$　4) 0.29

3. ถ้า $2\sqrt{2}$ เป็นรากของสมการ $ax^2 - 5\sqrt{2}x - 4 = 0$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง จงหาผลรวมทั้งหมดของรากของสมการ

1) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　2) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$　3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　4) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

ส่วนที่ 2 : เตรียมสอบ 7 วิชาสามัญ

4. ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง
ประพจน์ $\forall x\exists y[y^2 = -|x|]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

2) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-1, 0, 1\}$
ประพจน์ $\exists x\forall y[x^2 + |y| = 1]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

3) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนเต็ม
นิเสธของ $\exists x[(x < 0) \Rightarrow (x^2 > x^3)]$ คือ $\forall x[(x < 0) \wedge (x^2 \le x^3)]$

4) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง
นิเสธของ $\exists x\forall y[(x < 0) \wedge (x < y)]$ คือ $\forall x\exists y[(x \ge 0) \Rightarrow (x < y)]$

5. ให้ a, b, c $\in$ **R** กำหนด
เอกลักษณ์ ถ้า $a + b + c = 0$ แล้ว $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ ผลบวกของค่า x ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของสมการ $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{2-x}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 0　2) 1　3) 2　4) 3

6. กำหนดให้ ทุกคำตอบของสมการ $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$ อยู่ในรูป $2 + bi$, $b \in R$ แล้วค่า**มากที่สุด**ของ b เป็นเท่าใด

1) 0　2) $\sqrt{2}$　3) $\sqrt{3}$　4) $2\sqrt{3}$

7. จงหาจำนวนคู่อันดับ (a, b) ซึ่ง $(a + bi)^{2002} = a - bi$

1) 1001　2) 1002　3) 2003　4) 2004

เฉลย

1. เฉลย 1) 5967

P เป็นผลบวกของอนุกรมเลขคณิตที่มี $d = 2$, $a_1 = 17$ และ $a_n = 253$

หาค่า n จาก
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$253 = 17 + (n-1)2$$
$$\frac{236}{2} + 1 = n$$
$$\therefore\ n = 119$$

หา S_n จาก
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$S_{119} = \frac{119}{2}(17 + 253) = 16065 = P$$

Q เป็นผลบวกของอนุกรมเลขคณิตที่มี $d = 2$, $a_1 = 4$ และ $a_n = 200$

หาค่า n จาก
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$200 = 4 + (n-1)2$$
$$\frac{196}{2} + 1 = n$$
$$\therefore\ n = 99$$

หา S_n จาก
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$S_{99} = \frac{99}{2}(4 + 200) = 10098 = Q$$
$$\therefore\ P - Q = 16065 - 10098 = 5967$$

2. เฉลย 3) $\frac{21}{100}$

$$n(S) = 10 \times 10 = 100$$

พิจารณาเลขท้ายสองตัวที่มีผลรวมเป็นจำนวนเฉพาะที่**น้อยกว่า** 11

กรณีที่ 1 มีผลรวมเป็น 2 คือ 02, 11, 20
กรณีที่ 2 มีผลรวมเป็น 3 คือ 03, 12, 21, 30
กรณีที่ 3 มีผลรวมเป็น 5 คือ 05, 14, 23, 32, 41, 50
กรณีที่ 4 มีผลรวมเป็น 7 คือ 07, 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70

$$\therefore\ n(E) = 3 + 4 + 6 + 8 = 21$$

ดังนั้น
$$P(E) = \frac{21}{100} = 0.21$$

3. เฉลย 2) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

จาก $ax^2 - 5\sqrt{2}x - 4 = 0$ และ $2\sqrt{2}$ เป็นรากของสมการ

ดังนั้น
$$a(2\sqrt{2})^2 - 5\sqrt{2}(2\sqrt{2}) - 4 = 0$$
$$8a - 20 - 4 = 0$$
$$8a = 24$$
$$a = 3$$
$$\therefore\ 3x^2 - 5\sqrt{2}x - 4 = 0$$
$$(3x + \sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}) = 0$$
$$x = \frac{-\sqrt{2}}{3}, 2\sqrt{2}$$

ดังนั้น ผลบวกของรากสมการ คือ
$$-\frac{\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} = \frac{-\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$$

4. เฉลย 3) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนเต็ม
นิเสธของ $\exists x[(x < 0) \Rightarrow (x^2 > x^3)]$ คือ $\forall x[(x < 0) \wedge (x^2 \le x^3)]$

1) เมื่อ $x = 5$ ไม่มีจำนวนจริง y ที่สอดคล้องกับสมการ $y^2 = -|x| = -5$
ดังนั้น $\forall x\exists y[y^2 = -|x|]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

2) ไม่มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x^2 + |y| = 1$ เป็นจริง สำหรับ $y = -1, 0, 1$ ทุกค่า
ดังนั้น $\exists x\forall y[x^2 + |y| = 1]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

3) นิเสธของ $p \Rightarrow q$ คือ $p \wedge (\sim q)$
ดังนั้น นิเสธของ $\exists x[(x < 0) \Rightarrow (x^2 > x^3)]$ คือ $\forall x[(x < 0) \wedge (\sim(x^2 > x^3))]$ ซึ่งสมมูลกับ $\forall x[(x < 0) \wedge (x^2 \le x^3)]$

4) นิเสธของ $\exists x\forall y[(x < 0) \wedge (x < y)]$ คือ $\forall x\exists y[(\sim(x < 0)) \vee (\sim(x < y))]$ ซึ่งสมมูลกับ $\forall x\exists y[(x < 0) \Rightarrow (x \ge y)]$ ตัวเลือก 4) จึงผิด

5. เฉลย 2) 1

จากโจทย์ จะได้ $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-2} = 0$

โดยเอกลักษณ์ จะได้ $(\sqrt[3]{x-1})^3 + (\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{x-2})^3 = 3\sqrt[3]{(x-1)(x)(x-2)}$
$$(x-1) + x + x - 2 = 3\sqrt[3]{(x-1)(x)(x-2)}$$
$$(3x-3)^3 = 3^3(x-1)(x)(x-2)$$
$$(x-1)^3 = (x-1)(x)(x-2)$$
$$(x-1)[(x-1)^2 - (x)(x-2)] = 0$$
$$(x-1)(x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x) = 0$$
$$(x-1)(1) = 0$$
$$x = 1 \quad \text{คำตอบเดียว}$$

ดังนั้น ผลบวกค่า $x = 1$

6. เฉลย 3) $\sqrt{3}$

เนื่องจากทุกคำตอบของสมการ $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$ อยู่ในรูป $2 + bi$ และ $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี 3 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง
ดังนั้น จะมีอย่างน้อย 1 คำตอบที่เป็นจำนวนจริง
พิจารณาการหารสังเคราะห์ด้วย 2

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -6 & 15 & -14 \\ & & 2 & -8 & 14 \\ \hline & 1 & -4 & 7 & 0 \end{array}$$

$\therefore$ 2 เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ
ทำให้ได้ว่า $(x-2)(x^2 - 4x + 7) = 0$ $\therefore$ $x = 2$ หรือ $x^2 - 4x + 7 = 0$
จาก $x^2 - 4x + 7 = 0$ จะได้ $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-28}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}i$
ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{2, 2 - \sqrt{3}i, 2 + \sqrt{3}i\}$
$\therefore$ ค่า**มากที่สุด**ของ b คือ $\sqrt{3}$

7. เฉลย 4) 2004

ให้ $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ และ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
สมการที่กำหนดให้กลายเป็น $z^{2002} = \bar{z}$ สังเกตว่า
$$|z|^{2002} = |z^{2002}| = |\bar{z}| = |z|$$
$$|z^{2002}| - |z| = 0$$
$$|z|(|z|^{2001} - 1) = 0$$
ดังนั้น $|z| = 0$ หรือ $|z| = 1$ กรณี $|z| = 0$ ได้คำตอบเดียว คือ $z = 0$
ในกรณี $|z| = 1$ เราได้ว่า $z^{2002} = \bar{z}$ สมมูลกับ $z^{2003} = \bar{z} \cdot z = |z|^2 = 1$
เนื่องจากสมการ $z^{2003} = 1$ มี 2003 คำตอบที่แตกต่างกัน
รวมแล้วมีคู่อันดับ (a, b) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนด 2003 + 1 = 2004 คู่

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่
www.bunditnaenaew.com