

ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย

เพื่อเตรียมสอบ ONET + 9 วิชาสามัญ + GAT-PAT

วิชา PAT 1 : คณิตศาสตร์

ชุดที่ 5 (ตอนที่ 2/6)

เดลินิวส์

ร่วมกับ



นักเรียน
ไปรดาพร

โดยช่วงตั้งแต่ 13 ต.ค. 58-26 ก.พ. 59 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ป.6 ในวันอังคาร, ตะลุยโจทย์ ม.3 ในวันพุธ และตะลุยโจทย์ ม.ปลาย ในวันพฤหัสบดี+วันศุกร์

1. เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมตัดกันได้อย่างมากที่สุด (เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมคือ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอด 2 จุดที่ไม่ใช่จุดที่เรียงติดต่อกัน)

- 1) 45 จุด 2) 90 จุด
3) 210 จุด 4) 240 จุด

2. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(z) = i\bar{z}$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ และ $\bar{z}$ แทนสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน z มีจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดกี่จำนวนซึ่งมีสมบัติ $|z| = 5$ และ $f(z) = z$

- 1) 0 2) 1
3) 2 4) 4

3. พาราโบลา P มีสมการเป็น $x^2 = 4(y + 1)$ ตัดแกน x ที่จุด A และ B สมการของวงรี E ที่มี A และ B เป็น จุดโฟกัสและผ่านจุดยอดของพาราโบลา P คือสมการในข้อใดต่อไปนี้

- 1) $x^2 + 5y^2 = 5$ 2) $5x^2 + y^2 = 5$
3) $x^2 + 3y^2 = 3$ 4) $3x^2 + y^2 = 3$

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$ และ $f = \{(x, y) \mid B^tAB = [24]\}$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

- 1) $D_f \subset R_f$
2) ถ้า $x, y \geq 0$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลด
3) $R_f \subset \{y \mid x \leq 0 \text{ และ } (x, y) \in R_f\}$
4) ถ้า $x \geq 0$ แล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1-1

5. สัมประสิทธิ์ของ x^3 ในรูปกระจายของ $(1 + x + x^2 + x^3)^{12}$ เท่ากับเท่าใด

- 1) 54 2) 120
3) 364 4) 684

6. ให้ A แทนเซตของจำนวนเต็มระหว่าง 1 และ 1000 ซึ่งหารด้วย 12 ลงตัว B แทนเซตของจำนวนเต็มระหว่าง 1 และ 1000 ซึ่งหารด้วย 18 ลงตัว จำนวนสมาชิกของ $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด

- 1) 108 2) 109
3) 110 4) 111

เฉลย

1. เฉลย 3) 210 จุด

เนื่องจากเส้นทแยงมุมแต่ละเส้นเกิดจากการลากเส้นเชื่อมจุดยอด 2 จุด และเส้นทแยงมุม 2 เส้นตัดกันได้อย่างมากที่สุดแค่ 1 จุด ดังนั้นจุดยอด 4 จุด ทำให้เกิดจุดตัดของเส้นทแยงมุมได้ไม่เกิน 1 จุด นั่นคือ เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมตัดกันได้อย่างมากที่สุด 1 จุด

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210 \text{ จุด}$$

2. เฉลย 3) 2

จากนิยามของ f

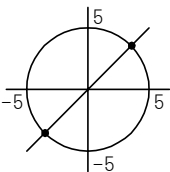
$$\begin{aligned} f(x + iy) &= i(x - iy) \\ &= y + ix \end{aligned}$$

สำหรับจำนวนจริง x และ y ใดๆ

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมบัติ $f(z) = z$ คือ

จำนวนในรูปแบบ $x + ix$ หรือ (x, x)

เซตของจำนวนทั้งหมดในรูปแบบนี้มีกราฟบนระนาบเชิงซ้อนเป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งทีผ่านจุดกำเนิด ส่วนเซตของจำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมบัติ $|z| = 5$ มีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดของระนาบเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมบัติทั้ง 2 ข้อมีกราฟเป็นจุดตัดของเส้นตรงและวงกลมดังกล่าวซึ่งมีอยู่ 2 จำนวน



3. เฉลย 1) $x^2 + 5y^2 = 5$

ขั้นที่ 1 หาจุดตัดแกน x และจุดยอดของพาราโบลา

พาราโบลา $P: x^2 = 4(y + 1)$ เป็นพาราโบลาหงายที่มีจุดยอดอยู่ที่ $C = (0, -1)$ จุดตัดแกน x ของพาราโบลา P คือจุดซึ่งมีพิกัด $y = 0$ และพิกัด x หาได้จากการแก้สมการ

$$\begin{aligned} x^2 &= 4(0 + 1) = 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น พาราโบลา P มีจุดยอด $C = (0, -1)$ และจุดตัดแกน x คือ $A = (-2, 0)$ และ $B = (2, 0)$

ขั้นที่ 2 หาสมการของวงรี E

วงรี E มีจุดโฟกัส $A = (-2, 0)$ และ $B = (2, 0)$ อยู่บนแกน x ดังนั้นวงรีมีแกนเอกอยู่บนแกน x และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด รูปแบบ

$$\text{ของสมการของวงรี } E \text{ คือ } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$$

สังเกตว่าแกนโทของวงรีอยู่บนแกน y และมี $C = (0, -1)$ เป็นจุดปลายจุดหนึ่งของแกนโท

ให้ $a =$ ความยาวครึ่งแกนเอก

$b =$ ความยาวครึ่งแกนโท $= 1$ (= ระยะระหว่างจุดศูนย์กลาง (จุดกำเนิด) และจุด C)

$c =$ ระยะระหว่างจุดศูนย์กลางและจุดโฟกัส $= 2$

ค่าของ a^2 หาได้จากความสัมพันธ์ $a^2 = b^2 + c^2 = 1^2 + 2^2 = 5$

ดังนั้น สมการของวงรี E คือ $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$ หรือ $x^2 + 5y^2 = 5$

4. เฉลย 4) ถ้า $x \geq 0$ แล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1-1

พิจารณา $B^tAB = [24]$

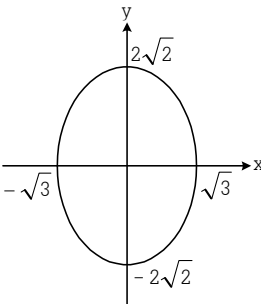
$$\begin{bmatrix} 2x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix} = [24]$$

$$\begin{bmatrix} 4x - y & 2x + 3y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix} = [24]$$

$$\begin{bmatrix} 2x(4x - y) & y(2x + 3y) \end{bmatrix} = [24]$$

$$[8x^2 - 2xy \quad 2xy + 3y^2] = [24]$$

$$[8x^2 + 3y^2] = [24]$$



$$\text{ดังนั้น } f = \{(x, y) \mid 8x^2 + 3y^2 = 24\} = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{8} = 1 \right\}$$

1) ถูก เพราะ $D_f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, $R_f = [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \therefore D_f \subseteq R_f$

2) ถูก เพราะ ใน Q_1 , f เป็นฟังก์ชันลด

3) ถูก เพราะ จากรูป $R_f = \{y \mid x \leq 0 \text{ และ } (x, y) \in R_f\}$

4) ผิด เพราะ f ไม่เป็นฟังก์ชันบน $[0, \sqrt{3}]$

5. เฉลย 3) 364

ใช้ทฤษฎีบททวินาม 3 ครั้ง : ครั้งแรกใช้เขียนรูปกระจายของ $(1 + (x + x^2 + x^3))^{12}$ จะได้พจน์ทั่วไปในรูปแบบ

$$\begin{aligned} &\binom{12}{m} (1)^{12-m} (x + x^2 + x^3)^m \\ &= \binom{12}{m} (x + (x^2 + x^3))^m, 0 \leq m \leq 12 \\ &= \binom{12}{m} \binom{m}{s} x^{m-s} (x^2 + x^3)^s, 0 \leq s \leq m \leq 12 \\ &= \binom{12}{m} \binom{m}{s} \binom{s}{t} x^{m-s} (x^2)^{s-t} (x^3)^t, 0 \leq t \leq s \leq m \leq 12 \end{aligned}$$

พจน์ a_3x^3 หากจากพจน์ทั่วไปโดยให้ $m - s + 2(s - t) + 3t = m + s + t = 3$ ซึ่งมีเพียง 3 กรณี ได้แก่ $(m, s, t) = (1, 1, 1), (2, 1, 0), (3, 0, 0)$ ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^3 คือ

$$\binom{12}{1} \binom{1}{1} \binom{1}{1} + \binom{12}{2} \binom{2}{1} \binom{1}{0} + \binom{12}{3} \binom{3}{0} \binom{0}{0} = 12 + 132 + 220 = 364$$

6. เฉลย 4) 111

จำนวนเต็มระหว่าง 1 และ 1000 ซึ่งหารด้วย 12 ลงตัว ได้แก่ $12, 24 = 2(12), 36 = 3(12), \dots, 996 = 83(12)$ ซึ่งมีทั้งหมด 83 จำนวน ดังนั้น $n(A) = 83$

จำนวนเต็มระหว่าง 1 และ 1000 ซึ่งหารด้วย 18 ลงตัว ได้แก่ $18, 36 = 2(18), 54 = 3(18), \dots, 990 = 55(18)$ ซึ่งมีทั้งหมด 55 จำนวน ดังนั้น $n(B) = 55$

จำนวนเต็มที่หารด้วย 12 และ 18 ลงตัวทั้งคู่ ต้องหารด้วย ค.ร.น. (12, 18) หรือ 36 ลงตัวด้วย

ดังนั้น จำนวนเต็มระหว่าง 1 และ 1000 ซึ่งหารด้วย 12 และ 18 ลงตัวทั้งคู่ ได้แก่ $36, 72 = 2(36), 108 = 3(36), \dots, 972 = 27(36)$ ซึ่งมีทั้งหมด 27 จำนวน ดังนั้น $n(A \cap B) = 27$

และจะได้ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 83 + 55 - 27 = 111$

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่
www.bunditnaeaw.com