

ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย
เพื่อเตรียมสอบ GAT-PAT มี.ศ.58
วิชา PAT 1 : คณิตศาสตร์
ชุดที่ 3 (ตอนที่ 4/4)



โดยช่วงตั้งแต่ 10 ก.พ. - 6 มี.ศ. 58 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย วิชา GAT (วันอังคาร), วิชา PAT1 (วันพุธ), วิชา PAT2 (วันพฤหัสบดี) และตะลุยโจทย์ ป.6 (วันศุกร์)

- ถ้า $2^{5x-y} \geq 4^5$ และ $\log_2(2y-x) = 2$ แล้วค่าต่ำสุดของ $x+y$ มีค่าเท่ากับข้อใด
1) 6 2) 8 3) 10 4) $\frac{40}{3}$
- ในงานเลี้ยงสังสรรค์ เด็กชายแต่ละคนจะจับมือทักทายกับเด็กชายอื่นคนละครั้ง เด็กหญิงก็จับมือทักทายกับเด็กหญิงอื่นคนละครั้ง แต่เด็กหญิงกับเด็กชายจะไม่จับมือทักทายกัน ถ้าเด็กชายมีจำนวนมากกว่าเด็กหญิงและมีการจับมือทักทายกันทั้งหมด 7 ครั้ง มีเด็กชายในงานเลี้ยงสังสรรค์ทั้งหมดกี่คน
1) 2 2) 3 3) 4 4) 5
- กำหนดให้ A เป็นสับเซตของจำนวนเต็ม ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้
ก. $1 \in A$
ข. ถ้า $x \in A$ แล้ว $-x \in A$
ค. $-2x \in A$ ก็ต่อเมื่อ $x \notin A$
จำนวนในข้อใดต่อไปนี้ไม่เป็นสมาชิกของ A
1) 2^{2558} 2) 2^{2557} 3) 2^{2556} 4) -2^{2556}
- กำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์คือ $U = R$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด
1) $\exists x \forall y \exists z [x+y=z]$ 2) $\forall x \forall y \exists z [xz=y]$
3) $\forall x \forall y \exists z [x+y=z]$ 4) $\exists x \forall y \exists z [xz=y]$
- อติตยาเลือกจำนวน 2 จำนวนที่ต่างกันโดยสุ่มจากเซต $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ และสุ่มเกียรติเลือกหนึ่งจำนวนโดยสุ่มจากเซต $\{1, 2, \dots, 10\}$ จงหาความน่าจะเป็นที่จำนวนที่สุ่มเกียรติเลือกได้จะมากกว่าผลบวกของจำนวนที่อติตยาเลือกได้
1) $\frac{2}{5}$ 2) $\frac{9}{20}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{11}{20}$
- ในการสำรวจนักเรียนชั้น ม. 6 ในโรงเรียนแห่งหนึ่ง 100 คน พบว่า มีนักเรียนจำนวน
41 คน เรียนวิชาคณิตศาสตร์
44 คน เรียนวิชาวิทยาศาสตร์
48 คน เรียนวิชาภาษาอังกฤษ
11 คน เรียนวิชาคณิตศาสตร์และภาษาอังกฤษ
14 คน เรียนวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์
19 คน เรียนวิชาวิทยาศาสตร์และภาษาอังกฤษ
10 คน ไม่เรียนวิชาใดเลย
ถ้าสุ่มนักเรียนขึ้นมา 1 คน ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะเรียนภาษาอังกฤษแต่ไม่เรียนคณิตศาสตร์เป็นเท่าใด
1) 0.25 2) 0.30 3) 0.33 4) 0.37
- ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(xy) = f(x)/y$ สำหรับจำนวนจริงบวก x และ y ใดๆ ถ้า $f(500) = 3$ แล้ว $f(600)$ มีค่าเท่าใด
1) 1 2) 2 3) $\frac{5}{2}$ 4) $\frac{18}{5}$

เฉลย

- 1) 6

จาก $2^{5x-y} \geq 4^5$
จะได้ $2^{5x-y} \geq 2^{10}$
จาก $\log_2(2y-x) = 2$
จะได้ $2y-x = 2^2$
 $2y-x = 4$... (2)

พิจารณาจุดตัดของสมการ ;
 $5x-y = 10$... (3)
 $2 \times (3) ; \quad 10x - 2y = 20$... (4)
 $(2) + (4) ; \quad 9x = 24$
 $x = \frac{8}{3}$
แทนค่า $x = \frac{8}{3}$ ใน (2) ; $2y - \frac{8}{3} = 4$
 $y = \frac{10}{3}$

ค่าต่ำสุดของ $x+y$ เกิดจากค่าต่ำสุดของ x รวมกับค่าต่ำสุดของ y
 \therefore ค่าต่ำสุดของ $x+y$ คือ $\frac{8}{3} + \frac{10}{3} = 6$
- 3) 4

สมมติว่า มีเด็กชาย b คน และเด็กหญิง g คน ในงานเลี้ยงสังสรรค์ เมื่อ $b > g$ จำนวนครั้งที่จับมือทักทายกันเท่ากับ
 $\frac{b(b-1)}{2} + \frac{g(g-1)}{2} = 7$
หรือ $b(b-1) + g(g-1) = 14$
สังเกตว่า $b(b-1)$ และ $g(g-1)$ เป็นจำนวนคู่ทั้งคู่และบวกกันได้ 14
พิจารณาผลบวก 12 + 2 (หรือ $4 \cdot 3 + 2 \cdot 1$), 10 + 4 และ 8 + 6
ตรวจสอบผลบวกเหล่านี้ พบว่ามีเพียงกรณีแรกเท่านั้นที่สามารถเขียนในรูปแบบ $b(b-1) + g(g-1)$ เนื่องจาก $b > g$ ดังนั้น $b = 4$ และ $g = 2$ นั่นคือเด็กชายที่อยู่ในงานเลี้ยงสังสรรค์มี 4 คน
- 2) 2^{2557}

พิจารณา ค. สมมูลกับ $(x \in A \rightarrow -2x \notin A) \wedge (x \notin A \rightarrow 2x \in A)$
จาก ก. และ ข. จะได้ว่า $1, -1 \in A$
โดย ค. จะได้ $-2, 2 \notin A$ และโดย ค. อีกครั้งจะได้ $-4, 4 \in A$
พิจารณาเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จะได้ว่า $A = \{\pm 1, \pm 4, \pm 16, \dots\} = \{\pm 2^{2k} \mid k \in \mathbf{N}\}$
นั่นคือ ± 2 ยกกำลังเลขคู่จะเป็นสมาชิกของ A
ดังนั้น $2^{2557} \notin A$

- 2) $\forall x \forall y \exists z [xz = y]$
1) ถูก เพราะ เลือก $x = 0$ และ $z = y$
จะได้ว่า $0 + y = y = z, \forall z \in R$
2) ผิด เพราะ ถ้า $x = 0, y = 1$
จะได้ว่า ทุก $z \in R, xz = 0 \times z = 0 \neq 1$
3) ถูก เพราะ เลือก $z = x + y$
จะได้ว่า $x + y = z, \forall x \in R, \forall y \in R$
4) ถูก เพราะ เลือก $x = 1$ และ $z = y$
จะได้ว่า $xz = 1 \times z = z = y, \forall z \in R$
- 1) $\frac{2}{5}$

จำนวนคู่หนึ่งที่อยู่ติดกันได้เป็นไปได้อีก $\binom{5}{2} = 10$ วิธี ผลบวก 9, 8, 4, และ 3 เป็นได้อย่างละวิธี (เช่น $9 = 5 + 4$) แต่ผลบวก 7, 6, และ 5 เป็นได้อย่างละ 2 วิธี (เช่น $7 = 5 + 2 = 4 + 3$) ความน่าจะเป็นของแต่ละจำนวนที่สุ่มเกียรติจะเลือกได้เท่ากับ $\frac{1}{10}$ ให้ (a, G_a) แทน "ผลบวกของจำนวนที่อยู่ติดกันได้เลือกได้เท่ากับ a และ จำนวนที่สุ่มเกียรติเลือกได้ $G_a > a$ " ดังนั้นความน่าจะเป็นที่จำนวนที่สุ่มเกียรติเลือกได้จะมากกว่าผลบวกของจำนวนที่อยู่ติดกันได้เท่ากับ
 $P(9, G_9) + P(8, G_8) + P(4, G_4) + P(3, G_3) + P(7, G_7) + P(6, G_6) + P(5, G_5)$
 $= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10}$
 $= \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$
- 4) 0.37

จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้สามารถวาดแผนภาพได้ดังนี้

จากข้อมูลที่โจทย์ให้มาพบว่า
- จำนวนนักเรียนที่เรียนภาษาอังกฤษ = 48 คน
- จำนวนนักเรียนที่เรียนภาษาอังกฤษและคณิตศาสตร์ = 11 คน
 \therefore จำนวนนักเรียนที่เรียนภาษาอังกฤษแต่ไม่เรียนคณิตศาสตร์ = $48 - 11 = 37$ คน
ถ้าสุ่มนักเรียนมา 1 คน ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะเรียนภาษาอังกฤษแต่ไม่เรียนคณิตศาสตร์ เท่ากับ $\frac{37}{100} = 0.37$
- 3) $\frac{5}{2}$

วิธีที่ 1 สังเกตว่า $f(600) = f\left(500 \cdot \frac{6}{5}\right) = \frac{f(500)}{\frac{6}{5}} = \frac{3}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{2}$

วิธีที่ 2 สำหรับจำนวนบวก x ใดๆ $f(x) = f(1 \cdot x) = \frac{f(1)}{x}$
จะเห็นได้ว่า $xf(x)$ คือ ค่าคงตัว $f(1)$
ดังนั้น $600 f(600) = 500 f(500) = 500(3) = 1500$
 $f(600) = \frac{1500}{600} = \frac{5}{2}$

หมายเหตุ $f(x) = \frac{1500}{x}$ คือ ฟังก์ชันเดียวที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่
www.bunditnaenaw.com