

ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย
เพื่อเตรียมสอบ GAT-PAT มี.ศ.58
วิชา PAT 1 : คณิตศาสตร์
ชุดที่ 3 (ตอนที่ 2/4)



โดยช่วงตั้งแต่ 10 ก.พ. - 6 มี.ค. 58 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย วิชา GAT (วันอังคาร), วิชา PAT1 (วันพุธ), วิชา PAT2 (วันพฤหัสบดี) และตะลุยโจทย์ ป.6 (วันศุกร์)

1. ให้ $N = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \dots \cdot 100!$ ถ้า $\frac{N}{a!}$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ โดย $0 < a < 100$ ข้อใดต่อไปนี้ **เป็นจริง**

- 1) a เป็นจำนวนเฉพาะ
- 2) a มีตัวประกอบเฉพาะเพียง 2 ตัว
- 3) a มีตัวประกอบเฉพาะเพียง 4 ตัว
- 4) a มีตัวประกอบเฉพาะเพียง 6 ตัว

2. กำหนดให้ a, b, c ∈ N ซึ่ง 8 ทหาร a เหลือเศษ 2, 8 ทหาร b เหลือเศษ 4 และ 8 ทหาร c เหลือเศษ 6 แล้ว 8 ทหาร ab + c เหลือเศษเป็นจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 0
- 2) 2
- 3) 4
- 4) 6

3. จำนวนเต็มบวก 4 จำนวน a, b, c, และ d มีผลคูณเท่ากับ 8! และสอดคล้องกับระบบสมการ

$$\begin{aligned} ab + a + b &= 524 \\ bc + b + c &= 146 \\ cd + c + d &= 104 \end{aligned}$$

จงหาค่าของ a - d

- 1) 4
- 2) 6
- 3) 8
- 4) 10

4. ข้อมูลชุดที่ 1 (x) มีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันกับข้อมูลชุดที่ 2 (y) ถ้าข้อมูลชุดที่ 1 และ 2 มีจำนวนข้อมูลอย่างละ 100 ตัว ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 4 และ 5

ตามลำดับ แล้วเมื่อ x = 4 แล้ว y จะมีค่าตรงกับข้อใด เมื่อกำหนด $\sum_{i=1}^{100} x_i y_i$

$$= 1700 \text{ และ } \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 800$$

- 1) 2
- 2) 3
- 3) 4
- 4) 5

5. ถ้า A เป็นเซตของจำนวนจริง x ซึ่งทำให้

ก. อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และ

$$\text{ข. } \sum_{n=1}^{\infty} x^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n$$

แล้ว A เป็นสับเซตของเซตใดต่อไปนี้

- 1) (-2, 0)
- 2) $[-1, \frac{1}{4}]$
- 3) $[0, \frac{3}{4}]$
- 4) (0, ∞)

6. ให้ $A = \{a, b, \{a, b\}\}$ และ $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. จำนวนสมาชิกของ $P(A) - (A \cup \{a, b\})$ เท่ากับ 6
- ข. $P(A) \cap (A \cup \{a, b\}) = A$

ข้อใดต่อไปนี้ **ถูกต้อง**

- 1) ก. และ ข. ถูก
- 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
- 3) ก. ผิด และ ข. ถูก
- 4) ก. และ ข. ผิด

7. ผลลัพธ์ของ $\cos 0^\circ + \cos 2^\circ + \cos 4^\circ + \dots + \cos 176^\circ + \cos 178^\circ + \cos 180^\circ$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) -1
- 2) 0
- 3) 1
- 4) 2

เฉลย

1. เฉลย 2) a มีตัวประกอบเฉพาะเพียง 2 ตัว

$$\begin{aligned} \therefore N &= 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \dots \cdot 100! = 1! \cdot (2 \cdot 1!) \cdot 3! \cdot (4 \cdot 3!) \cdot \dots \cdot 99! \cdot (100 \cdot 99!) \\ &= (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 100)(1!3!5! \dots 99!)^2 \\ &= 2^{50}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 50)(1!3!5! \dots 99!)^2 \\ &= 50!2^{50}(1!3!5! \dots 99!)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{N}{50!} = 2^{50}(1!3!5! \dots 99!)^2$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์

$$\therefore a = 50 = 2 \cdot 5^2$$

นั่นคือ a มีตัวประกอบเฉพาะ 2 ตัว คือ 2 และ 5

2. เฉลย 4) 6

ให้ a, b, c ∈ N

จาก 8 ทหาร a เหลือเศษ 2 ดังนั้น จะได้ว่ามี p ∈ I ซึ่ง

$$a = 8p + 2 \quad \dots(1)$$

จาก 8 ทหาร b เหลือเศษ 4 ดังนั้น จะได้ว่ามี q ∈ I ซึ่ง

$$b = 8q + 4 \quad \dots(2)$$

จาก 8 ทหาร c เหลือเศษ 6 ดังนั้น จะได้ว่ามี r ∈ I ซึ่ง

$$c = 8r + 6 \quad \dots(3)$$

$$\begin{aligned} \text{นำ } ((1) \times (2)) + (3) \text{ จะได้ ; } ab + c &= (8p + 2)(8q + 4) + 8r + 6 \\ &= 8^2pq + 8 \cdot 4 \cdot p + 8 \cdot 2 \cdot q + 8 + 8r + 6 \\ &= 8(8pq + 4p + 2q + 1 + r) + 6 \\ &= 8k + 6 \end{aligned}$$

(เมื่อให้ k = 8pq + 4p + 2q + 1 + r ∈ I)

∴ 8 ทหาร ab + c เหลือเศษ 6

3. เฉลย 4) 10

$$\text{สังเกตว่า } (a+1)(b+1) = ab + a + b + 1 = 524 + 1 = 525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$\text{และ } (b+1)(c+1) = bc + b + c + 1 = 146 + 1 = 147 = 3 \cdot 7^2$$

เนื่องจาก (a + 1)(b + 1) เป็นพหุคูณของ 25 และ (b + 1)(c + 1) ไม่ใช่พหุคูณของ 5

ดังนั้น a + 1 ต้องเป็นพหุคูณของ 25 เนื่องจาก a + 1 ทหาร 525 ลงตัว

a ต้องเป็นจำนวนหนึ่งใน 24, 74, 174 หรือ 524 ซึ่งมี 24 จำนวนเดียวที่หาร 8! ลงตัว

ดังนั้น a = 24 ทำให้ b + 1 = 21 และ b = 20 จากข้อเท็จจริงนี้ จะได้ว่า

$$c + 1 = 7 \text{ และ } c = 6$$

$$\text{และสุดท้าย } (c + 1)(d + 1) = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

ดังนั้น d + 1 = 15 และ d = 14 สรุปได้ว่า a - d = 24 - 14 = 10

4. เฉลย 4) 5

$$\therefore \bar{x} = 4 \rightarrow \sum_{i=1}^{100} x_i / 100 = 4 \quad \therefore \sum_{i=1}^{100} x_i = 400$$

$$\bar{y} = 5 \rightarrow \sum_{i=1}^{100} y_i / 100 = 5 \quad \therefore \sum_{i=1}^{100} y_i = 500$$

$$\text{จากความสัมพันธ์ } \sum_{i=1}^{100} y_i = m \sum_{i=1}^{100} x_i + nc \text{ และ } \sum_{i=1}^{100} x_i y_i = m \sum_{i=1}^{100} x_i^2 + c \sum_{i=1}^{100} x_i$$

$$\text{จะได้ } 500 = m(400) + 100c \text{ และ } 1700 = m(800) + c(400)$$

$$\therefore m = \frac{3}{8}, c = \frac{7}{2}$$

$$\text{ดังนั้น } y = \frac{3}{8}x + \frac{7}{2} \quad \therefore \text{เมื่อ } x = 4 \text{ จะได้ } y = \frac{3}{8}(4) + \frac{7}{2} = 5$$

5. เฉลย 3) $[0, \frac{3}{4}]$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

$$\text{ดังนั้นจะได้ } \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \text{ เมื่อ } |x| < 1 \quad \therefore -1 < x < 1 \quad \dots(1)$$

$$\text{และ } \sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n = \frac{2x}{1-2x} \text{ เมื่อ } |2x| < 1 \quad \therefore -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \quad \dots(2)$$

$$\text{จาก } \sum_{n=1}^{\infty} x^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n, (1) \text{ และ } (2) \text{ จะได้ } \frac{x}{1-x} \leq \frac{2x}{1-2x}$$

นำ $(1-x)^2(1-2x)^2$ คูณตลอด ;

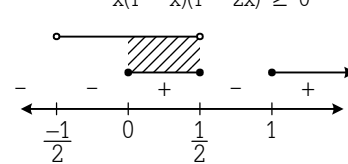
$$x(1-x)(1-2x)^2 \leq 2x(1-x)^2(1-2x)$$

$$x(1-x)(1-2x)^2 - 2x(1-x)^2(1-2x) \leq 0$$

$$x(1-x)(1-2x)[(1-2x) - 2(1-x)] \leq 0$$

$$x(1-x)(1-2x)(-1) \leq 0$$

$$x(1-x)(1-2x) \geq 0$$



$$\text{ดังนั้น } A = [0, \frac{1}{2}] \subset [0, \frac{3}{4}]$$

6. เฉลย 4) ก. และ ข. ผิด

ก. ผิด เพราะหาว่า $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{\{a, b\}\}, \{a, b\}, \{a, \{a, b\}\}, \{b, \{a, b\}\}, A\}$

$$P(A) - (A \cup \{a, b\}) = P(A) - A ; [A \cup \{a, b\} = A]$$

ดังนั้น จำนวนสมาชิกของ $P(A) - (A \cup \{a, b\})$ เท่ากับ 7 ได้แก่ $\{a\}, \{b\}, \{\{a, b\}\}, \{a, \{a, b\}\}, \{b, \{a, b\}\}, \emptyset$ และ A

ข. ผิด เพราะหาว่า $P(A) \cap (A \cup \{a, b\}) = P(A) \cap A = \{\{a, b\}\}$

7. เฉลย 2) 0

$$\text{วิธีที่ 1 พิจารณา } \cos 2^\circ + \cos 4^\circ + \dots + \cos 178^\circ = (2 \cos^2 1^\circ - 1) + \dots + (2 \cos^2 89^\circ - 1) = 2(\cos^2 1^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ) - 89$$

$$\text{พิจารณา } \cos^2 1^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ = \sin^2 89^\circ + \dots + \sin^2 1^\circ$$

$$\text{สมมติ } \cos^2 1^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ = x$$

$$\therefore \cos^2 1^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ + \sin^2 89^\circ + \dots + \sin^2 1^\circ = 2x$$

$$89 \text{ คู่ของ } \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 2x \quad \therefore x = \frac{89}{2}$$

$$\text{ดังนั้น } \cos 2^\circ + \dots + \cos 178^\circ = 2\left(\frac{89}{2}\right) - 89 = 0$$

$$\therefore \cos 0^\circ = 1, \cos 180^\circ = -1$$

$$\therefore \cos 0^\circ + \dots + \cos 180^\circ = 1 + 0 - 1 = 0$$

วิธีที่ 2 จาก $\cos \theta = -\cos(180^\circ - \theta)$

$$\cos 0^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 88^\circ + \cos 90^\circ + \cos 92^\circ + \dots + \cos 178^\circ + \cos 180^\circ = \cos 0^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 88^\circ + (0) + (-\cos 88^\circ) + \dots + (-\cos 2^\circ) + (-\cos 0^\circ) = 0$$

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่

www.bunditnaenaw.com