นสพ.เดลินิวส์ ฉบับวันพุธที่ 11 กุมภาพันธ์ 2558

ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย
เพื่อเตรียมสอบ GAT-PAT มี.ค.58
วิชา PAT 1 : คณิตศาสตร์
ชุดที่ 3 (ตอนที่ 1/4)

โดยช่วงตั้งแต่ 10 ก.พ. - 6 มี.ค. 58 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย วิชา GAT (วันอังคาร), วิชา PAT1 (วันพุธ), วิชา PAT2 (วันพฤหัส) และตะลุยโจทย์ ป.6 (วันศุกร์)

1. กำหนด A_i เป็นพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ i และ L_i เป็นความยาวเส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ i ถ้า $\frac{A_i}{A_{i+1}} = 2$ ทุก $i \in \mathbf{N}$ และ $A_1 = 4$ แล้ว $\sum_{i=1}^{\infty} L_i$ มีค่าเป็นเท่าใด

1) $8 + 4\sqrt{2}$ 2) $8 - 4\sqrt{2}$ 3) $16 + 8\sqrt{2}$ 4) $16 - 8\sqrt{2}$

2. กำหนดให้ C เป็นปริมาณที่มีค่าขึ้นกับค่าของตัวแปร x และ y ด้วยความสัมพันธ์ $C = 5x + by$ เมื่อ x, y สอดคล้องเงื่อนไข $3x + 2y \le 13$, $x + 3y \le 16$, $x \ge 2$ และ $y \ge 3$ ถ้าค่า**สูงสุด**ของ C คือ 52 แล้ว b มีค่า**ต่ำสุด**เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{47}{5}$ 2) 12 3) $\frac{121}{9}$ 4) 14

3. ให้ $A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & 5 \\ -x & -2 \end{bmatrix}$ ถ้า $AB = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ -3/2 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A^{-1}B^t)$ เมื่อ A^{-1} คือ อินเวอร์สการคูณของ A และ B^t คือ ทรานสโพสของ B

1) 6 2) −6 3) $\frac{27}{2}$ 4) 9

4. ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการพาราโบลาที่มี (1, −1) เป็นจุดโฟกัส และ $\sqrt{3}x + y = 0$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์

1) $x^2 - 3y^2 + 2\sqrt{3}xy + 8x - 8y + 8 = 0$
2) $x^2 - 3y^2 - 2\sqrt{3}xy - 8x + 8y + 8 = 0$
3) $x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{3}xy + 8x - 8y + 8 = 0$
4) $x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}xy - 8x + 8y + 8 = 0$

5. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B เท่ากับ 30° ; $AB = 40\sqrt{3}$ หน่วย และ BC = 40 หน่วย แล้ว $\sec 2A + \cos^2\left(A + \frac{\pi}{2}\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1) $-\frac{7}{4} - \sqrt{3}$ 2) $-\frac{1}{4} - \sqrt{3}$ 3) $\frac{5}{4}$ 4) $\frac{9}{4}$

6. ให้ $f(x) = x^2 + 6x + 1$ และ R แทนเซตของจุด (x, y) ในระนาบพิกัด ซึ่ง $f(x) + f(y) \le 0$ และ $f(x) - f(y) \le 0$ จำนวนใดต่อไปนี้ใกล้เคียงกับพื้นที่ของ R **มากที่สุด**

1) 22 2) 23 3) 24 4) 25

เฉลย

1. เฉลย 3) $16 + 8\sqrt{2}$

$$\because \left(\frac{L_i}{4}\right)^2 = A_i \text{ และ } \frac{A_i}{A_{i+1}} = 2 \quad \therefore \frac{\left(\frac{L_i}{4}\right)^2}{\left(\frac{L_{i+1}}{4}\right)^2} = 2$$

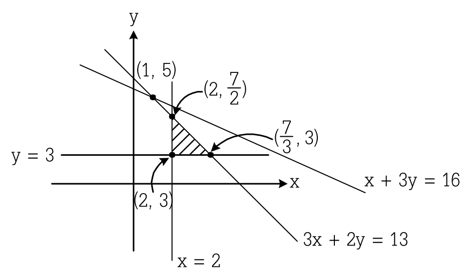
จะได้ $\frac{L_i}{L_{i+1}} = \sqrt{2}$ นั่นคือ $\frac{L_{i+1}}{L_i} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$L_1, L_2, L_3, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเป็น $\frac{1}{\sqrt{2}}$ โดย $L_1 = 8\left[\because \left(\frac{L_1}{4}\right)^2 = 4\right]$

$$\therefore \sum_{i=1}^{\infty} L_i = \frac{L_1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{8\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{1} = 16 + 8\sqrt{2}$$

2. เฉลย 2) 12

จากเงื่อนไข $3x + 2y \le 13$, $x + 3y \le 16$, $x \ge 2$ และ $y \ge 3$ วาดรูปได้ดังนี้



หาจุดตัดของเส้นตรง $x + 3y = 16$ ...(1)

$3x + 2y = 13$ ...(2)

$3 \times (1)$; $3x + 9y = 48$ ...(3)

(3) − (2) ; $7y = 35$

$y = 5$

แทน y = 5 ใน (1) จะได้ $x = 1$

∴ จุดตัดของเส้นตรงคือ จุด (1, 5)

พิจารณาจุด (2, 3) ถ้า $C = 5(2) + b(3) = 52$ จะได้ $b = 14$

$\left(\frac{7}{3}, 3\right)$ ถ้า $C = 5\left(\frac{7}{3}\right) + b(3) = 52$ จะได้ $b = \frac{121}{9}$

$\left(2, \frac{7}{2}\right)$ ถ้า $C = 5(2) + \frac{7}{2}(b) = 52$ จะได้ $b = 12$

∴ ค่า**ต่ำสุด**ของ b คือ 12

3. เฉลย 1) 6

ขั้นที่ 1 หาค่าของ x

จาก $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 5 \\ -x & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ -3/2 & -1 \end{bmatrix}$

จะได้ $\begin{bmatrix} x^2 & 5x \\ -x/2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ -3/2 & -1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น x = 3 และจะได้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

ขั้นที่ 2 หา $\det(A^{-1}B^t)$

$\det(A^{-1}B^t) = \det(A^{-1})\det(B^t)$; $[\det(XY) = \det(X)\det(Y)]$

$= \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(B)$; $[\det(X^{-1}) = 1/\det(X)]$

$= \frac{1}{3/2} \cdot (-6 + 15) = 6$

4. เฉลย 4) $x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}xy - 8x + 8y + 8 = 0$

ให้ P(x, y) เป็นจุดใดๆ บนพาราโบลา

ดังนั้น ระยะทางจาก P(x, y) ไปยังจุดโฟกัส (1, −1) = ระยะทางจาก P(x, y) ไปเส้นไดเรกตริกซ์ $\sqrt{3}x + y = 0$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \frac{|\sqrt{3}x + y|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}}$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1} = \frac{|\sqrt{3}x + y|}{2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = \frac{3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2}{4}$$

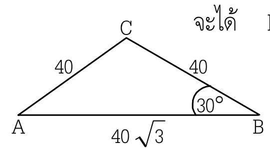
$$\therefore x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}xy - 8x + 8y + 8 = 0$$

5. เฉลย 4) $\frac{9}{4}$

พิจารณา $\sec 2A + \cos^2\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\cos 2A} + \sin^2 A$

$= \frac{1}{1 - 2\sin^2 A} + \sin^2 A$ ...(*)

จากโจทย์ พิจารณารูป



จาก $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

จะได้ $b^2 = 40^2 + (40\sqrt{3})^2 - 2(40)(40\sqrt{3})\cos 30°$

$= 40^2 + 40^2 \cdot 3 - 2 \cdot 40^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 40^2$

$\therefore b = 40$

จาก AC = BC จะได้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ดังนั้น $\sin A = \sin B = \sin 30° = \frac{1}{2}$

แทนค่า $\sin A = \frac{1}{2}$ ใน (*)

จะได้ $\sec 2A + \cos^2\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 - 2\sin^2 A} + \sin^2 A$

$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

6. เฉลย 4) 25

สังเกตว่า $f(x) + f(y) = x^2 + 6x + y^2 + 6y + 2$

$= (x + 3)^2 + (y + 3)^2 - 16$

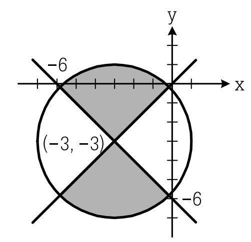
และ $f(x) - f(y) = x^2 - y^2 + 6(x - y)$

$= (x - y)(x + y + 6)$

เงื่อนไขที่กำหนดให้สามารถเขียนเป็น $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 \le 16$ และ $(x - y)(x + y + 6) \le 0$

อสมการแรกมีกราฟเป็นอาณาบริเวณบนวงกลมและภายในวงกลมที่มีรัศมี 4 หน่วย และจุดศูนย์กลาง (−3, −3) อสมการที่สองสามารถเขียนเป็น ($x - y \ge 0$ และ $x + y + 6 \le 0$) หรือ ($x - y \le 0$ และ $x + y + 6 \ge 0$)

แต่ละอสมการมีกราฟเป็นครึ่งระนาบที่มีขอบเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (−3, −3) และมีความชัน 1 หรือ −1 ดังนั้น เซต R คือ อาณาบริเวณที่แรเงาในรูป พื้นที่ของ R เท่ากับครึ่งหนึ่งของพื้นที่วงกลม ซึ่งเท่ากับ $8\pi \approx 25.13$



นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่
www.bunditnaenaew.com