ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย

เพื่อเตรียมสอบ ONET + 9 วิชาสามัญ + GAT-PAT

วิชาคณิตศาสตร์ (PAT1 + 9 วิชาสามัญ)

ชุดที่ 10 (ตอนที่ 3/4)

โดยช่วงตั้งแต่ 4 ก.ค.-27 ต.ค. 60 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ป.6 ในวันอังคาร, ตะลุยโจทย์ ม.3 ในวันพุธ และตะลุยโจทย์ ม.ปลาย ในวันพฤหัส+วันศุกร์

1. ถ้า C เป็นวงกลมที่มีจุดโฟกัสและความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลา $y^2 + 2y - 8x + 17 = 0$ เป็นจุดศูนย์กลาง และเส้นผ่านศูนย์กลางตามลำดับ แล้วระยะทางที่**สั้นที่สุด**จากจุดยอดของพาราโบลาไปยังจุดบน C เป็นเท่าใด

1) 2 หน่วย 2) 4 หน่วย

3) 6 หน่วย 4) 8 หน่วย

2. ถ้าลำดับของจำนวน $t_1, t_2, t_3, \ldots$ นิยามโดย $t_1 = 2$ และ $t_{n+1} = \dfrac{t_n - 1}{t_n + 1}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ แล้ว t_{999} มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) -3 2) $-\frac{1}{2}$

3) $\frac{1}{3}$ 4) 2

3. กำหนด $\vec{u}$, $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 2 มิติ ถ้า $A = \{a \in \mathbf{R} \mid \vec{u}$ หรือ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ศูนย์ และ $(a^2 - 5)\vec{u} + \vec{v} = (1 - 2a)\vec{u} + 3a\vec{v}\}$ แล้ว n(A) มีค่าตรงกับข้อใด

1) 1 2) 2

3) 3 4) 4

4. กำหนด $A = \left\{x \,\middle|\, \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+3x+4} > \left(\frac{1}{16}\right)^{2x+8}\right\}$

$B = \{x \mid \log_2(x+5) < \log_4(4x+17)\}$

แล้ว $A \cup B$ เป็นสับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1) $(-6, 3)$ 2) $(-5, 5)$

3) $(-2, 4)$ 4) $(0, 7)$

5. ให้ x เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $|x| < 1$

ถ้า $1 + (1 - x)\left(\frac{1}{3}\right) + (1 - x + x^2)\left(\frac{1}{3^2}\right) + (1 - x + x^2 - x^3)\left(\frac{1}{3^3}\right) + \ldots$

มีผลบวกเท่ากับ $\frac{9}{7}$ แล้ว $\sum_{n=1}^{11} nx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1) 33 2) 44

3) 55 4) 66

6. กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & -4 \\ -9 & b \end{bmatrix}$ สุ่ม (a, b) จาก $B = \{(a, b) \mid a, b \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, 36\}\}$

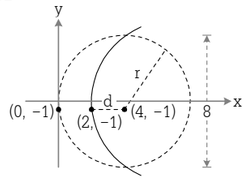
ความน่าจะเป็นที่ A **ไม่เป็น**เมทริกซ์เอกฐานตรงกับข้อใด

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{35}{36}$

3) $\frac{143}{144}$ 4) $\frac{1289}{1296}$

เฉลย

1. เฉลย 1) 2 หน่วย



จัดรูปสมการพาราโบลาได้เป็น $(y + 1)^2 = 4(2)(x - 2)$ มีจุดยอดที่ V(2, −1) จุดโฟกัสที่ F(4, −1) และความยาวเลตัสเรกตัม $4 \times 2 = 8$ หน่วย

ดังนั้น C เป็นวงกลมซึ่ง (h, k) = F(4, −1) และ $r = \frac{8}{2} = 4$

$\therefore$ ระยะทางที่**สั้นที่สุด**จากจุดยอดพาราโบลาไปยังจุดบน C คือ $|d - r| = |2 - 4| = 2$ หน่วย

2. เฉลย 2) $-\frac{1}{2}$

ลองคำนวณพจน์ต้นๆ ของอนุกรม

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = \frac{t_1 - 1}{t_1 + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$t_3 = \frac{t_2 - 1}{t_2 + 1} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$t_4 = \frac{t_3 - 1}{t_3 + 1} = \frac{-\frac{1}{2} - 1}{-\frac{1}{2} + 1} = -3$$

$$t_5 = \frac{t_4 - 1}{t_4 + 1} = \frac{-3 - 1}{-3 + 1} = 2$$

เนื่องจากแต่ละพจน์ในอนุกรมขึ้นอยู่กับพจน์ก่อนเพียงพจน์เดียวเท่านั้น จะได้ว่า ลำดับของพจน์ต่างๆ เวียนซ้ำโดยมีคาบเป็น 4 ดังนั้น $t_1 = t_5 = t_9 = \ldots = t_{997} = t_{1001} = 2$

จะได้ $t_{998} = t_2 = \frac{1}{3}$

และ $t_{999} = t_3 = -\frac{1}{2}$

3. เฉลย 3) 3

พิจารณา $(a^2 - 5)\vec{u} + \vec{v} = (1 - 2a)\vec{u} + 3a\vec{v}$

$(a^2 + 2a - 6)\vec{u} = (3a - 1)\vec{v}$

$\vec{u}$ จะเป็นเวกเตอร์ศูนย์ เมื่อ $3a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{3}$

$\vec{v}$ จะเป็นเวกเตอร์ศูนย์ เมื่อ $a^2 + 2a - 6 = 0 \rightarrow a = -1 \pm \sqrt{7}$

$\therefore A = \{\frac{1}{3}, -1 + \sqrt{7}, -1 - \sqrt{7}\}$

$\therefore n(A) = 3$

4. เฉลย 2) $(-5, 5)$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+3x+4} > \left(\frac{1}{16}\right)^{2x+8}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+3x+4} > \left(\frac{1}{4}\right)^{4x+16}$$

$$x^2 + 3x + 4 < 4x + 16$$

$$x^2 - x - 12 < 0$$

$$(x + 3)(x - 4) < 0$$

$$\therefore x \in (-3, 4)$$

$$\therefore A = (-3, 4)$$

$$\log_2(x + 5) < \log_4(4x + 17)$$

$$\log_2(x + 5) < \frac{1}{2}\log_2(4x + 17)$$

$$2\log_2(x + 5) < \log_2(4x + 17)$$

$$\log_2(x + 5)^2 < \log_2(4x + 17)$$

$$(x + 5)^2 < 4x + 17$$

$$x^2 + 10x + 25 < 4x + 17$$

$$x^2 + 6x + 8 < 0$$

$$(x + 4)(x + 2) < 0$$

$$\therefore x \in (-4, -2)$$

$$\therefore B = (-4, -2)$$

$\therefore A \cup B = (-3, 4) \cup (-4, -2) = (-4, 4) \subseteq (-5, 5)$

5. เฉลย 1) 33

พิจารณา $1 + (1 - x)\left(\frac{1}{3}\right) + (1 - x + x^2)\left(\frac{1}{3^2}\right) + (1 - x + x^2 - x^3)\left(\frac{1}{3^3}\right) + \ldots = \frac{9}{7}$

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\right) - x\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\right) + x^2\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\right) - \ldots = \frac{9}{7}$$

จะเห็นว่า ด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเป็น $-\frac{1}{3}x$

จึงได้ $$\frac{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right)}{1 + \frac{1}{3}x} = \frac{9}{7}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right)}{1 + \frac{1}{3}x} = \frac{9}{7}$$

$$\frac{9}{6 + 2x} = \frac{9}{7}$$

$$6 + 2x = 7$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{11} nx = \sum_{n=1}^{11} n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{11} n = \frac{1}{2}\,\frac{(11)(12)}{2} = 33$$

6. เฉลย 3) $\frac{143}{144}$

$\because$ $\det(A) = ab - (-4)(-9) = ab - 36$

เนื่องจาก A จะ**ไม่เป็น**เมทริกซ์เอกฐาน เมื่อ $\det(A) \neq 0$

$\therefore ab \neq 36$

$\because$ $(a, b) \in B$ และ $ab = 36$ จะได้ (a, b) = (1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9), (6, 6), (9, 4), (12, 3), (18, 2), (36, 1) ทั้งหมด 9 แบบ

$\because$ $n(B) = 36 \times 36 = 1296 = n(S)$

ดังนั้น จำนวนสมาชิกใน B ที่ $ab \neq 36$ มีทั้งหมด $n(E) = 1296 - 9 = 1287$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่ A **ไม่เป็น**เมทริกซ์เอกฐาน ; $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1287}{1296} = \frac{143}{144}$

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่

www.bunditnaenaew.com