

ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย

เพื่อเตรียมสอบ ONET + 9 วิชาสามัญ + GAT-PAT

วิชาคณิตศาสตร์ (PAT1+9 วิชาสามัญ)

ชุดที่ 15 (ตอนที่ 2/4)



โดยช่วงตั้งแต่ 5 มี.ค.-28 มี.ย. 62 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ป.6 ในวันอังคาร, ตะลุยโจทย์ ม.3 ในวันพุธ และตะลุยโจทย์ ม.ปลาย ในวันพฤหัสบดี+วันศุกร์

1. กำหนด $n \in \mathbb{N}$ และ $x \in \mathbb{R}$ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-3}{-5}\right)^n$ ลู่ออก เมื่อ $x \in \mathbb{R} - [a, b]$

แล้ว $a + b$ มีค่าตรงกับข้อใด

- 1) 5
- 2) 6
- 3) 10
- 4) 16

2. ลัญลักษณ์ $[x]$ แทนจำนวนเต็มที่มีค่าไม่เกิน x เช่น $[6.6] = 6$ และ $[8.9] = 8$ เซตคำตอบของสมการ $\left[\frac{3}{x}\right] + \left[\frac{4}{x}\right] = 5$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

- 1) $(0, 1]$
- 2) $\left(1, \frac{5}{4}\right]$
- 3) $\left(1, \frac{4}{3}\right]$
- 4) $\left(1, \frac{3}{2}\right]$

3. กำหนด $P(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ โดย $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ถ้า $P(1+i) = P(2i-1) = 0$ แล้ว $P(1)$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 2
- 2) 4
- 3) 8
- 4) 16

4. ถ้า (x, y, z) คือคำตอบของระบบสมการ $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 3 \\ 2x + 4y - z = 7 \\ x - 11y + 4z = 3 \end{cases}$

แล้ว z มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1) 0
- 2) -1
- 3) 1
- 4) ไม่มีข้อใดถูก

5. สุ่มจำนวนจาก $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ มา 3 จำนวนที่แตกต่างกัน ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของทั้ง 3 จำนวนนั้นหารด้วย 5 ลงตัวหรือเป็นจำนวนคู่ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{80}{84}$
- 2) $\frac{76}{84}$
- 3) $\frac{72}{84}$
- 4) $\frac{68}{84}$

เฉลย

1. เฉลย 2) 6

พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-3}{-5}\right)^n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ $r = \left(\frac{x-3}{-5}\right)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-3}{-5}\right)^n$ ลู่ออก เมื่อ $\left|\frac{x-3}{-5}\right| \geq 1$

$$\frac{x-3}{-5} \geq 1 \quad \text{หรือ} \quad \frac{x-3}{-5} \leq -1$$

$$\therefore x \geq 8 \quad \text{หรือ} \quad x \leq -2$$

$\therefore x \in \mathbb{R} - [-2, 8]$

จะได้ว่า $a = -2$ และ $b = 8$ ดังนั้น $a + b = -2 + 8 = 6$

2. เฉลย 3) $\left(1, \frac{4}{3}\right]$

กรณีที่ 1 ; $x < 0$ ถ้า $x < 0$ แล้ว $\frac{3}{x} < 0$ ดังนั้น $\left[\frac{3}{x}\right] \leq \frac{3}{x} < 0$

ทำนองเดียวกัน $\left[\frac{4}{x}\right] < 0$ ในกรณีนี้เป็นไปไม่ได้ที่ $\left[\frac{3}{x}\right] + \left[\frac{4}{x}\right] = 5$

กรณีที่ 2 ; $x > 0$ เมื่อ $x > 0$ จะได้ $\frac{3}{x} < \frac{4}{x}$ ดังนั้น $\left[\frac{3}{x}\right] \leq \left[\frac{4}{x}\right]$

เนื่องจาก $\left[\frac{3}{x}\right]$ และ $\left[\frac{4}{x}\right]$ แต่ละจำนวนเป็นจำนวนเต็ม มี 3 กรณีที่เป็นไปได้

2.1 $\left[\frac{3}{x}\right] = 0$ และ $\left[\frac{4}{x}\right] = 5$

2.2 $\left[\frac{3}{x}\right] = 1$ และ $\left[\frac{4}{x}\right] = 4$

2.3 $\left[\frac{3}{x}\right] = 2$ และ $\left[\frac{4}{x}\right] = 3$

กรณีที่ 2.1 ; ถ้า $\left[\frac{3}{x}\right] = 0$ แล้ว $0 \leq \frac{3}{x} < 1$ หรือ $x > 3$

เซตคำตอบของสมการ $\left[\frac{3}{x}\right] = 0$ คือ $(3, \infty)$ ถ้า $\left[\frac{4}{x}\right] = 5$ แล้ว $5 \leq \frac{4}{x} < 6$

หรือ $\frac{2}{3} < x \leq \frac{4}{5}$ เซตคำตอบของสมการ $\left[\frac{4}{x}\right] = 5$ คือ $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right]$

เซตคำตอบของสมการทั้งสองไม่มีสมาชิกร่วม ดังนั้นไม่มีคำตอบในกรณีนี้

กรณีที่ 2.2 ; ถ้า $\left[\frac{3}{x}\right] = 1$ แล้ว $1 \leq \frac{3}{x} < 2$ หรือ $\frac{3}{2} < x \leq 3$

เซตคำตอบของสมการ $\left[\frac{3}{x}\right] = 1$ คือ $\left(\frac{3}{2}, 3\right]$ ถ้า $\left[\frac{4}{x}\right] = 4$ แล้ว $\frac{4}{5} < x \leq 1$

เซตคำตอบของสมการ $\left[\frac{4}{x}\right] = 4$ คือ $\left(\frac{4}{5}, 1\right]$ เซตคำตอบของ สมการทั้งสอง

ไม่มีสมาชิกร่วม ดังนั้นไม่มีคำตอบในกรณีนี้

กรณีที่ 2.3 ; ถ้า $\left[\frac{3}{x}\right] = 2$ แล้ว $2 \leq \frac{3}{x} < 3$ หรือ $1 < x \leq \frac{3}{2}$

เซตคำตอบของสมการ $\left[\frac{3}{x}\right] = 2$ คือ $\left(1, \frac{3}{2}\right]$ ถ้า $\left[\frac{4}{x}\right] = 3$ แล้ว $1 < x \leq \frac{4}{3}$

เซตคำตอบของสมการ $\left[\frac{4}{x}\right] = 3$ คือ $\left(1, \frac{4}{3}\right]$ ในกรณีนี้อินเตอร์-เซกชันของ

เซตคำตอบคือ $\left(1, \frac{4}{3}\right]$

สรุปว่าเซตคำตอบของ $\left[\frac{3}{x}\right] + \left[\frac{4}{x}\right] = 5$ คือ $\left(1, \frac{4}{3}\right]$

3. เฉลย 4) 16

$\therefore P(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

และ $P(1+i) = P(2i-1) = 0$ จึงได้ $P(1-i) = P(-2i-1) = 0$ ด้วย

$\therefore 1+i, 1-i, 2i-1$ และ $-2i-1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

จะได้ $P(x) = A(x-(1+i))(x-(1-i))(x-(2i-1))(x-(-2i-1))$

\therefore สัมประสิทธิ์พจน์ x^4 ของ $P(x)$ เป็น 2 $\therefore A = 2$

$\therefore P(x) = 2(x-(1+i))(x-(1-i))(x-(2i-1))(x-(-2i-1))$

$\therefore P(1) = 2(-i)(i)(2-2i)(2+2i)$

$= 2(1)(8) = 16$

4. เฉลย 4) ไม่มีข้อใดถูก

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & -11 & 4 & 3 \end{bmatrix} R_1 \leftrightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 & -11 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 7 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \begin{bmatrix} 1 & -11 & 4 & 3 \\ 0 & 26 & -9 & 1 \\ 0 & 52 & -18 & -12 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - 5R_1 \rightarrow R_3$$

$$R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 & -11 & 4 & 3 \\ 0 & 26 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}$$

แถวสุดท้ายของเมทริกซ์แต่งเติมแทนสมการ $0x + 0y + 0z = -14$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น ระบบสมการที่กำหนดให้ไม่มีคำตอบ

จาก $x - 11y + 4z = 3$... (1)

และ $2x + 4y - z = 7$

จะได้ $4x + 8y - 2z = 14$... (2)

(1) + (2); $5x - 3y + 2z = 17$ ซึ่งไม่ตรงกับสมการ $5x - 3y + 2z = 3$

\therefore ระบบสมการที่กำหนดให้ไม่มีคำตอบ

5. เฉลย 1) $\frac{80}{84}$

ให้ E_1 แทน เหตุการณ์ที่ผลคูณของทั้ง 3 จำนวนหารด้วย 5 ลงตัว

$\therefore E_1'$ แทน เหตุการณ์ที่ผลคูณของทั้ง 3 จำนวนหารด้วย 5 ไม่ลงตัว

เหตุการณ์ E_1' จะเกิดเมื่อทั้ง 3 จำนวนไม่มีเลข 5

นั่นคือ $n(S) = \binom{9}{3} = 84$ แบบ และ $n(E_1') = \binom{8}{3} = 56$ แบบ

$\therefore P(E_1) = 1 - P(E_1') = 1 - \frac{n(E_1')}{n(S)} = 1 - \frac{56}{84} = \frac{28}{84}$

ให้ E_2 แทน เหตุการณ์ที่ผลคูณของทั้ง 3 จำนวนเป็นจำนวนคู่

$\therefore E_2'$ แทน เหตุการณ์ที่ผลคูณของทั้ง 3 จำนวนเป็นจำนวนคี่

$\therefore E_2'$ เกิดเมื่อทั้ง 3 จำนวนเป็นจำนวนคี่ ซึ่งมีได้ $\binom{5}{3} = 10$ แบบ

$\therefore P(E_2) = 1 - P(E_2') = 1 - \frac{n(E_2')}{n(S)} = 1 - \frac{10}{84} = \frac{74}{84}$

$\therefore E_1 \cap E_2$ หมายถึง เหตุการณ์ที่ผลคูณของทั้ง 3 จำนวนหาร

ด้วย 5 ลงตัว และเป็นจำนวนคู่ ซึ่งเกิดเมื่อมีเลข 5 อยู่หนึ่งจำนวน และจำนวนคู่อย่างน้อย 1 จำนวน ดังนี้

กรณีที่ 1 มีเลข 5 และจำนวนคู่ 2 ตัว เกิดได้ $1 \times \binom{4}{2} = 6$ แบบ

กรณีที่ 2 มีเลข 5, จำนวนคู่ 1 ตัว และจำนวนคี่ 1 ตัว เกิดได้

$1 \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 16$ แบบ

$\therefore n(E_1 \cap E_2) = 6 + 16 = 22$

และ

$P(E_1 \cap E_2) = \frac{22}{84}$

$\therefore P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$= \frac{28}{84} + \frac{74}{84} - \frac{22}{84} = \frac{80}{84}$

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่

www.bunditnaenaew.com