

ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย

เพื่อเตรียมสอบ ONET + 9 วิชาสามัญ + GAT-PAT

วิชาคณิตศาสตร์ (PAT1+9 วิชาสามัญ)

ชุดที่ 11 (ตอนที่ 3/4)



โดยช่วงตั้งแต่ 31 ต.ค. 60-2 มี.ค. 61 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ป.6 ในวันอังคาร, ตะลุยโจทย์ ม.3 ในวันพุธ และตะลุยโจทย์ ม.ปลาย ในวันพฤหัสบดี+วันศุกร์

1. กำหนดข้อมูลชุดหนึ่งดังนี้

| | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 |
| 1 | 1.1 | 1.1 | 1.1 | 1.3 | 1.3 | 1.5 |

ถ้า $a \in \mathbf{R}$ ทำให้ $\forall c \in \mathbf{R}$ $\left[\sum_{i=1}^7 |x_i - a| \leq \sum_{i=1}^7 |x_i - c| \right]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ถ้า $b \in \mathbf{R}$ ทำให้ $\forall c \in \mathbf{R}$ $\left[\sum_{i=1}^7 (x_i - b)^2 \leq \sum_{i=1}^7 (x_i - c)^2 \right]$ มีค่าความจริง เป็นจริง

แล้ว $|a - b|$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้เป็น

- 1) 0.1
- 2) 0.15
- 3) 0.2
- 4) 0.25

2. กำหนดเอกภาพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

ก. $\exists x \forall y [x^2y^2 + xy - 4 = 0]$

ข. $\forall x \exists y [x \neq 0 \rightarrow x^2y^2 + xy - 4 = 0]$

ข้อใดถูกต้อง

- 1) ก. และ ข. จริง
- 2) ก. จริง และ ข. เท็จ
- 3) ก. เท็จ และ ข. จริง
- 4) ก. และ ข. เท็จ

3. ให้ a เป็นจำนวนเต็มมากที่สุด ซึ่ง $a + 2 | a^4 + 8$

และ b เป็นจำนวนเต็มทีน้อยที่สุด ซึ่ง $b - 3 | 5(b^2 - 5)$

แล้ว $a - b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 17
- 2) 24
- 3) 32
- 4) 39

4. กำหนด $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ โดย $a_{ij} = \begin{cases} ij & ; i=j \\ i+j & ; i \neq j \end{cases}$

และ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ถ้า $AX = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ แล้ว $x_1 + x_2$ มีค่าตรงกับข้อใด

- 1) -1
- 2) 0
- 3) 2
- 4) 4

5. กำหนดให้ $\sin \theta = \frac{3}{7}$ และ $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ แล้ว $\cos 2\theta$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1) $\frac{31}{49}$
- 2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- 3) $\frac{2}{3}$
- 4) $\frac{40}{49}$

6. ข้อใดต่อไปนี้เป็นค่าของ c ทั้งหมดที่ทำให้ $x^2 - 4x - c - \sqrt{8x^2 - 32x - 8c} = 0$ มีรากเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกันสองค่า

- 1) $-12 < c < -4$
- 2) $-12 < c \leq -4$
- 3) $c < -12$
- 4) $c > -4$

เฉลย

1. เฉลย 1) 0.1

$\sum_{i=1}^7 |x_i - a|$ มีค่าน้อยสุด เมื่อ $a = \text{Med} = 1.1$

$\sum_{i=1}^7 (x_i - b)^2$ มีค่าน้อยสุด เมื่อ $b = \bar{x}$

$= \frac{1+1.1+1.1+1.1+1.3+1.3+1.5}{7} = 1.2$

$\therefore |a - b| = |1.1 - 1.2| = 0.1$

2. เฉลย 3) ก. เท็จ และ ข. จริง

ก. เท็จ

พิจารณา $\forall x \exists y [x^2y^2 + xy - 4 \neq 0]$

ไม่ว่าเลือก x เป็นจำนวนใด สามารถเลือก $y = 0$

จะได้ $x^2y^2 + xy - 4 = x^2 \cdot 0^2 + x \cdot 0 - 4 = -4 \neq 0$

ดังนั้น $\forall x \exists y [x^2y^2 + xy - 4 \neq 0]$ เป็นจริง

จะได้ $\exists x \forall y [x^2y^2 + xy - 4 = 0]$ เป็นเท็จ

ข. จริง

พิจารณา $x^2y^2 + xy - 4 = 0$

จะได้ $y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4x^2(-4)}}{2x^2} = \frac{-x \pm \sqrt{17x^2}}{2x^2}$

\therefore จะหาค่า y ได้เสมอ เมื่อ $x \neq 0$

จึงได้ว่า $\forall x \exists y [x \neq 0 \rightarrow x^2y^2 + xy - 4 = 0]$ เป็นจริง

3. เฉลย 4) 39

พิจารณา $a + 2 | a^4 + 8$

เนื่องจาก $a + 2 | a^4 - 16$ ดังนั้น $a + 2 | (a^4 + 8) - (a^4 - 16)$
 $a + 2 | 24$

นั่นคือ $a + 2 = -24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$
 $a = -26, -14, \dots, 10, 22$

จะได้ $a = 22$

พิจารณา $b - 3 | 5(b^2 - 5)$

เนื่องจาก $b - 3 | 5(b^2 - 9)$ ดังนั้น $b - 3 | 5(b^2 - 5) - 5(b^2 - 9)$
 $b - 3 | 20$

นั่นคือ $b - 3 = -20, -10, -5, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 10, 20$
 $b = -17, -7, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 13, 23$

จะได้ $b = -17$

ดังนั้น $a - b = 22 - (-17) = 39$

4. เฉลย 3) 2

จะได้ว่า $a_{11}(A) = (1)(1) = 1 \quad a_{12}(A) = 1 + 2 = 3$

$a_{21}(A) = 2 + 1 = 3 \quad a_{22}(A) = (2)(2) = 4$

จาก $AX = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = B$

$x_1 + 3x_2 = 4$

$3x_1 + 4x_2 = 7 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1$

ดังนั้น $x_1 + x_2 = 1 + 1 = 2$

5. เฉลย 1) $\frac{31}{49}$

$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$

$= 1 - 2\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{31}{49}$

6. เฉลย 1) $-12 < c < -4$

เราเริ่มต้นโดยแก้สมการที่กำหนดให้แล้วจึงดูว่ามีเงื่อนไขอะไรเกิดขึ้นกับ c เนื่องจาก $8x^2 - 32x - 8c = 8(x^2 - 4x - c)$ เราให้ $y = x^2 - 4x - c$ สมการที่กำหนดให้จะกลายเป็น

$y - \sqrt{8y} = 0 \dots(*)$

$y = \sqrt{8y}$

$y^2 = 8y$

$y(y - 8) = 0$

ดังนั้น $y = 0$ หรือ $y = 8$ เราสามารถตรวจสอบได้ว่าทั้งสองค่านี้เป็นรากของ (*)

ดังนั้น $x^2 - 4x - c = 0$ หรือ $x^2 - 4x - c = 8$

พิจารณาสมาการทั้งสองนี้ ($x^2 - 4x - c = 0$ และ $x^2 - 4x - c = 8$)

สำหรับสมการ $x^2 - 4x - c = 0$ ดิสคริมิแนนต์ของสมการนี้คือ $(-4)^2 - 4(-c) = 16 + 4c$

ใช้ดิสคริมิแนนต์หาเงื่อนไขเกี่ยวกับจำนวนรากของสมการ จะได้ว่า

สมการนี้ ไม่มีรากจริง (รากที่เป็นจำนวนจริง) เมื่อ $16 + 4c < 0$ หรือเมื่อ $c < -4$

มีรากจริง 1 ค่า เมื่อ $16 + 4c = 0$ หรือเมื่อ $c = -4$

มีรากจริง 2 ค่า เมื่อ $16 + 4c > 0$ หรือเมื่อ $c > -4$

สำหรับสมการ $x^2 - 4x - c = 8$ หรือ $x^2 - 4x - (c + 8) = 0$: ดิสคริมิแนนต์ของสมการนี้คือ $(-4)^2 - 4(-(c + 8)) = 48 + 4c$

สมการนี้ ไม่มีรากจริง เมื่อ $48 + 4c < 0$ หรือเมื่อ $c < -12$

มีรากจริง 1 ค่า เมื่อ $48 + 4c = 0$ หรือเมื่อ $c = -12$

มีรากจริง 2 ค่า เมื่อ $48 + 4c > 0$ หรือเมื่อ $c > -12$

สังเกตว่าค่าของ x ที่เป็นรากของสมการหนึ่งจะไม่เป็นรากของอีกสมการหนึ่ง เพราะ $x^2 - 4x - c$ ไม่สามารถจะเท่ากับ 0 และ 8 พร้อมกัน พิจารณาจำนวนรากของแต่ละสมการในแต่ละช่วงของค่าของ c ดังนี้

| | $c < -12$ | $c = -12$ | $-12 < c < -4$ | $c = -4$ | $c > -4$ |
|--------------------|-----------|-----------|----------------|----------|----------|
| $x^2 - 4x - c = 0$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| $x^2 - 4x - c = 8$ | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| รวมจำนวนรากจริง | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้มีรากจริงที่แตกต่างกัน 2 ค่า เมื่อ $-12 < c < -4$