นสพ.เดลินิวส์ ฉบับวันศุกร์ที่ 15 ธันวาคม 2560

ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย

เพื่อเตรียมสอบ ONET + 9 วิชาสามัญ + GAT-PAT

วิชาคณิตศาสตร์ (PAT1 + 9 วิชาสามัญ)

ชุดที่ 11 (ตอนที่ 2/4)

โดยช่วงตั้งแต่ 31 ต.ค. 60-2 มี.ค. 61 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ป.6 ในวันอังคาร, ตะลุยโจทย์ ม.3 ในวันพุธ และตะลุยโจทย์ ม.ปลาย ในวันพฤหัส+วันศุกร์

1. ระยะห่างระหว่างจุดใน $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ ที่ทำให้ $x^2 + 2y$ มี**ค่าสูงสุด** มีค่าตรงกับข้อใด

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ หน่วย 2) $\sqrt{3}$ หน่วย

3) 2 หน่วย 4) $2\sqrt{3}$ หน่วย

2. นิยาม $(\underbrace{fofofofo \ldots of}_{n \text{ ตัว}})(x) = f^n(x)$

กำหนด $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ถ้า $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = L \in \mathbb{R}^+$ แล้ว L มีค่าตรงกับข้อใด

1) $\sqrt{5} - 1$ 2) $\sqrt{5} + 1$

3) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

3. ถ้า $\arcsin(2x) - \arccos x = \frac{\pi}{4}$ แล้ว x^2 มีค่าตรงกับข้อใด

1) $\frac{5+2\sqrt{2}}{17}$ 2) $\frac{5-2\sqrt{2}}{17}$

3) $\frac{5+2\sqrt{2}}{34}$ 4) $\frac{5-2\sqrt{2}}{34}$

4. ถ้า K เป็นจุดบนด้าน BC ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC และถ้า BAK = 15° แล้วอัตราส่วนของความยาว $\frac{AK}{AB}$ เท่ากับเท่าใด

1) $\frac{3\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{2}$

3) $\frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{2}$ 4) $\frac{3\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{2}$

เฉลย

1. เฉลย 4) $2\sqrt{3}$ หน่วย

จาก $x^2 + y^2 = 4$ จะได้ $x^2 = 4 - y^2$

$$x^2 + 2y = (4 - y^2) + 2y = -y^2 + 2y + 4$$

ให้ $f(y) = -y^2 + 2y + 4$

จะหาค่าสูงสุดและต่ำสุด โดยหา y ที่ทำให้ $f'(y) = 0$

$\because \quad f'(y) = -2y + 2 = 0$

$\therefore \quad y = 1$

$\because \quad f''(y) = -2 \rightarrow f''(1) = -2 < 0$

ดังนั้น เมื่อ y = 1 ทำให้ f(y) มีค่าสูงสุด

$\because \quad x^2 = 4 - y^2$ ดังนั้น $x^2 = 4 - 1^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

$\therefore$ จุดใน $\{(x,y) \mid x^2+y^2=4\}$ ที่ทำให้ x^2+2y มีค่าสูงสุด คือ $(-\sqrt{3}, 1)$ และ $(\sqrt{3}, 1)$

$\therefore \quad |(-\sqrt{3}, 1) - (\sqrt{3}, 1)| = 2\sqrt{3}$

2. เฉลย 4) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

พิจารณา $f(x) = \frac{1}{1+x} \rightarrow f^2(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} \rightarrow f^{\infty}(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}$

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}$$

$$L = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}} \rightarrow L = \frac{1}{1+L}$$

$$L^2 + L - 1 = 0$$

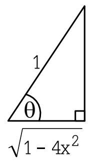
$$L = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

แต่ $L \in \mathbb{R}^+$ $\quad \therefore L = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

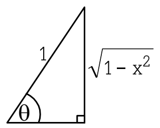
3. เฉลย 3) $\frac{5+2\sqrt{2}}{34}$

$$\sin[\arcsin(2x) - \arccos x] = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\sin[\arcsin(2x)]\cos[\arccos(x)] - \cos[\arcsin(2x)]\sin[\arccos x] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$\rightarrow \cos[\arcsin(2x)] = \sqrt{1-4x^2}$



$\rightarrow \sin[\arccos x] = \sqrt{1-x^2}$

จะได้ $\quad (2x)(x) - \sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$2x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}$$

$$4x^4 - 2\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2} = (1-4x^2)(1-x^2)$$

$$4x^4 - 2\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2} = 1 - 5x^2 + 4x^4$$

$$(5 - 2\sqrt{2})x^2 = \frac{1}{2}$$

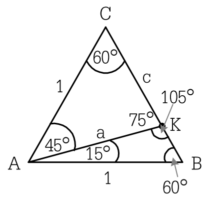
$$x^2 = \frac{1}{2(5-2\sqrt{2})} = \frac{5+2\sqrt{2}}{2(25-8)} = \frac{5+2\sqrt{2}}{34}$$

4. เฉลย 3) $\frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{2}$

สมมติว่าแต่ละด้านของ Δ ABC ยาว 1 หน่วย $\left(\text{อัตราส่วน } \frac{AK}{AB} \text{ ไม่ขึ้นกับหน่วยวัด}\right)$

ให้ a แทนความยาวของด้าน AK และ c แทนความยาวของด้าน CK

ความยาวของ AB คือ 1 เราต้องการหา a อาศัยกฎของโคไซน์ จะได้



$$a^2 = 1 + c^2 - 2c\cos 60^\circ = 1 + c^2 - c$$

$$c^2 = 1 + a^2 - 2a\cos 45^\circ = 1 + a^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}a$$

เนื่องจาก $c = \sqrt{1+a^2-\frac{2}{\sqrt{2}}a}$ จะได้

$$a^2 = 1 + 1 + a^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}a - \sqrt{1+a^2-\frac{2}{\sqrt{2}}a}$$

$$0 = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}a - \sqrt{1+a^2-\frac{2}{\sqrt{2}}a}$$

แก้สมการเพื่อหา a ;

$$\sqrt{1+a^2-\frac{2}{\sqrt{2}}a} = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}a$$

$$1 + a^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}a = 4 - \frac{8}{\sqrt{2}}a + 2a^2$$

$$0 = 3 - \frac{6}{\sqrt{2}}a + a^2$$

$$a = \frac{\frac{6}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{36}{2} - 4(1)(3)}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{18-12} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$$

$\frac{1}{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{6}) > 1$ เป็นค่าของ a ไม่ได้ เพราะว่า a < 1 (K อยู่บนคอร์ดของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง A และรัศมี 1)

ดังนั้น $\quad a = \frac{1}{2}(3\sqrt{2} - \sqrt{6}) = \frac{1}{2}(3\sqrt{2} - \sqrt{3}\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(3 - \sqrt{3})$

อาจใช้กฎของ sine ; $\quad \frac{AK}{\sin 60^\circ} = \frac{AB}{\sin 105^\circ}$

$$\frac{AK}{AB} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{2}$$

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่

www.bunditnaenaew.com