ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย

เพื่อเตรียมสอบ ONET + 9 วิชาสามัญ + GAT-PAT

วิชาคณิตศาสตร์ (PAT1 + 9 วิชาสามัญ)

ชุดที่ 13 (ตอนที่ 3/4)

โดยช่วงตั้งแต่ 3 ก.ค.-26 ต.ค. 61 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ป.6 ในวันอังคาร, ตะลุยโจทย์ ม.3 ในวันพุธ และตะลุยโจทย์ ม.ปลาย ในวันพฤหัส+วันศุกร์

1. กำหนดสมการจุดประสงค์ $P = x + y$ ถ้าอสมการข้อจำกัด คือ $x \geq \frac{5}{12}$, $y \geq 0$, $3x - 2y \geq 1$, $x + 3y \leq 1$ แล้ว**ผลต่าง**ระหว่าง**ค่าสูงสุด**และ**ค่าต่ำสุด**ของ P ตรงกับข้อใด

1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{7}{12}$

3) $\frac{4}{11}$ 4) $\frac{10}{33}$

2. บันไดยาว 10 ฟุต พาดอยู่กับกำแพง เกิดเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีบันไดเป็นด้านตรงข้ามมุมฉากและพื้นกับกำแพงประกอบกันเป็นด้านประกอบมุมฉาก ถ้าความสูงของปลายบันไดที่พาดอยู่กับกำแพงมีค่าโดยสุ่มระหว่าง 0 และ 10 ฟุต ความน่าจะเป็นที่รูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะมีพื้นที่**มากกว่า** 15 ตารางฟุตเท่ากับเท่าใด

1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

3) $\frac{1}{10}$ 4) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

3. เลขสี่หลักสุดท้ายของจำนวน 101^{99} ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1) 9901 2) 9899

3) 8901 4) 8899

4. ถ้าวันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2561 ตรงกับวันจันทร์ วันในข้อใดต่อไปนี้เป็นวันจันทร์ (ปี พ.ศ. 2561 มี 365 วัน)

1) 15 ธันวาคม พ.ศ. 2561 2) 16 ธันวาคม พ.ศ. 2561

3) 17 ธันวาคม พ.ศ. 2561 4) 18 ธันวาคม พ.ศ. 2561

5. จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุดกำเนิด จุดยอด และจุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2 - 8y + 4x + 12 = 0$

1) $x^2 + y^2 + x + 4y = 0$ 2) $x^2 + y^2 - x + 4y = 0$

3) $x^2 + y^2 - x - 4y = 0$ 4) $x^2 + y^2 + x - 4y = 0$

6. กำหนด $P^n(A) = \underbrace{P(P(P(\ldots P}_{n \text{ ตัว}}(A)))$

ถ้า $A = \{1, \{2\}, \{\{1\}\}, \{\{\{2\}\}\}\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของ $(P(A) \cap A) \cup (P^2(A) \cap A) \cup (P^3(A) \cap A) \cup \ldots \cup (P^{100}(A) \cap A)$ เท่ากับข้อใด

1) 1 2) 2

3) 3 4) 4

7. กำหนด A และ B เป็นเซตจำกัดใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $A \cap B \in P(A)$

ข. $P(B) \subset P(A \cup B)$

ข้อใด**ถูกต้อง**

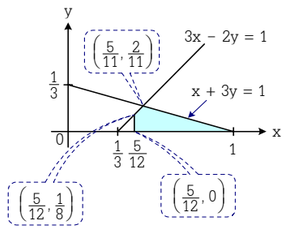
1) ก. และ ข. ถูก 2) ก. ถูกเพียงข้อเดียว

3) ข. ถูกเพียงข้อเดียว 4) ก. และ ข. ผิด

เฉลย

1. เฉลย 2) $\frac{7}{12}$

วาดกราฟอสมการข้อจำกัดทั้งหมดได้ดังนี้



จะได้จุดวิกฤต คือ $(1, 0)$, $\left(\frac{5}{11}, \frac{2}{11}\right)$, $\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{8}\right)$, $\left(\frac{5}{12}, 0\right)$

แทนค่า $(1, 0)$ $\therefore P = 1 + 0 = 1$

แทนค่า $\left(\frac{5}{11}, \frac{2}{11}\right)$ $\therefore P = \frac{5}{11} + \frac{2}{11} = \frac{7}{11}$

แทนค่า $\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{8}\right)$ $\therefore P = \frac{5}{12} + \frac{1}{8} = \frac{13}{24}$

แทนค่า $\left(\frac{5}{12}, 0\right)$ $\therefore P = \frac{5}{12} + 0 = \frac{5}{12}$

$\therefore P_{max} - P_{min} = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

2. เฉลย 1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

ให้ h แทนความสูงและ b แทนฐานของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $h^2 + b^2 = 10^2$ หรือ $b^2 = 100 - h^2$

เราต้องการหาความน่าจะเป็นที่ $\frac{1}{2}bh > 15$ เมื่อ $0 \leq h \leq 10$

เนื่องจาก $\frac{1}{2}bh > 15$ เมื่อ $b^2h^2 = (100 - h^2)h^2 > 900$

แก้อสมการ $h^4 - 100h^2 + 900 < 0$ จะได้คำตอบของอสมการอยู่ระหว่างรากสองค่าที่เป็นจำนวนบวกของสมการ $h^4 - 100h^2 + 900 = 0$

เนื่องจาก $h^4 - 100h^2 + 900 = (h^2 - 90)(h^2 - 10)$

ดังนั้น รากที่เป็นจำนวนบวกของสมการ คือ $3\sqrt{10}$ และ $\sqrt{10}$ ซึ่งอยู่ในช่วง (0, 10) ทั้งคู่

สรุปได้ว่า $\frac{1}{2}bh > 15$ เมื่อ h มีค่าอยู่ในช่วง $(\sqrt{10}, 3\sqrt{10})$

ความน่าจะเป็นที่รูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะมีพื้นที่มากกว่า 15 เท่ากับอัตราส่วนความยาวช่วง $(\sqrt{10}, 3\sqrt{10})$ ต่อความยาวช่วง (0, 10)

นั่นคือ $\frac{3\sqrt{10} - \sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

3. เฉลย 1) 9901

$$101^{99} = (100 + 1)^{99}$$
$$= \binom{99}{0}100^{99} + \binom{99}{1}100^{98} + \ldots + \binom{99}{97}100^2 + \binom{99}{98}100 + \binom{99}{99}$$
$$= 100^2A + \binom{99}{98}100 + \binom{99}{99} \quad \text{เมื่อ } A \in \mathbf{N}$$
$$= 10000A + 9900 + 1$$
$$= 10000A + 9901$$

$\because$ 10000A ลงท้ายด้วย 0 สี่ตัว

$\therefore$ 101^{99} ลงท้ายด้วย 9901

4. เฉลย 3) 17 ธันวาคม พ.ศ. 2561

พิจารณาว่า วันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2561 เป็นวันที่ 1 ของปี 1 หารด้วย 7 เหลือเศษ 1 เป็นวันจันทร์

วันที่ 8 มกราคม พ.ศ. 2561 เป็นวันที่ 8 ของปี 8 หารด้วย 7 เหลือเศษ 1 เป็นวันจันทร์

ดังนั้น ถ้าวันที่ของปี หารด้วย 7 เหลือเศษ 1 จะเป็นวันจันทร์

ตั้งแต่ 1 มกราคม พ.ศ. 2561 ถึง 30 พฤศจิกายน พ.ศ. 2561 มีจำนวน

31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 = 334 วัน

จะได้ วันที่ 15 ธันวาคม พ.ศ. 2561 เป็นวันที่ 334 + 15 = 349 ของปี หารด้วย 7 เหลือเศษ 6

วันที่ 17 ธันวาคม พ.ศ. 2561 เป็นวันที่ 334 + 17 = 351 ของปี หารด้วย 7 เหลือเศษ 1

$\therefore$ วันที่ 17 ธันวาคม พ.ศ. 2561 เป็นวันจันทร์

5. เฉลย 3) $x^2 + y^2 - x - 4y = 0$

จัดรูปสมการพาราโบลาได้ $(y^2 - 8y + 16) = -4x - 12 + 16$

$(y - 4)^2 = -4(x - 1)$

มีจุดยอด คือ (1, 4) $\because$ $c = -1$ จึงมีจุดโฟกัส (0, 4)

สมมติสมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$

ผ่านจุดกำเนิด ; $0 + 0 + 0 + 0 + E = 0$

$\therefore E = 0$

ผ่านจุด (0, 4) ; $0 + 16 + 0 + 4D + E = 0$

$\because E = 0$; $4D = -16$

$\therefore D = -4$

ผ่านจุด (1, 4) ; $1 + 16 + C + 4D + E = 0$

$\because D = -4, E = 0$; $1 + 16 + C - 16 + 0 = 0$

$\therefore C = -1$

ดังนั้น สมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 - x - 4y = 0$

6. เฉลย 2) 2

พิจารณา $1 \in A$ และ $1 \notin P^n(A)$ ทุก $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

$\{2\} \in A$ และ $\{2\} \notin P^n(A)$ ทุก $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

$\{\{1\}\} \in A$ และ $\{\{1\}\} \in P^2(A)$ จะได้ $P^2(A) \cap A = \{\{\{1\}\}\}$

$\{\{\{2\}\}\} \in A$ และ $\{\{\{2\}\}\} \in P^3(A)$ จะได้ $P^3(A) \cap A = \{\{\{\{2\}\}\}\}$

ดังนั้น $(P(A) \cap A) \cup (P^2(A) \cap A) \cup (P^3(A) \cap A) \cup \ldots \cup (P^{100}(A) \cap A)$

$= \varnothing \cup \{\{\{1\}\}\} \cup \{\{\{\{2\}\}\}\} \cup \varnothing \cup \ldots \cup \varnothing$

$= \{\{\{1\}\}, \{\{\{2\}\}\}\}$

$\therefore$ จำนวนสมาชิก คือ 2

7. เฉลย 1) ก. และ ข. ถูก

ก. $\because$ $A \cap B \subset A$ ดังนั้น $A \cap B \in P(A)$ $\therefore$ ก. **ถูก**

ข. $\because$ $B \subset A \cup B$ ดังนั้น $P(B) \subset P(A \cup B)$ $\therefore$ ข. **ถูก**

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่

www.bunditnaenaew.com