

ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย

เพื่อเตรียมสอบ ONET + 9 วิชาสามัญ + GAT-PAT

วิชาคณิตศาสตร์ (PAT1+9 วิชาสามัญ)

ชุดที่ 13 (ตอนที่ 1/4)

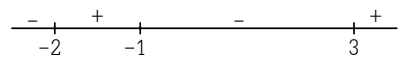


โดยช่วงตั้งแต่ 3 ก.ค.-26 ต.ค. 61 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ป.6 ในวันอังคาร, ตะลุยโจทย์ ม.3 ในวันพุธ และตะลุยโจทย์ ม.ปลาย ในวันพฤหัสบดี+วันศุกร์

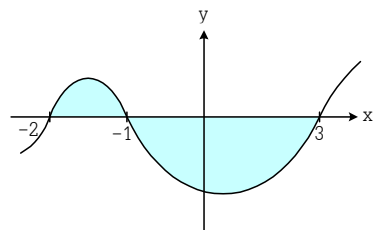
1. อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟ $f(x) = x^3 - 7x - 6$ กับแกน x ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
 1) 26.5 ตารางหน่วย 2) 28.25 ตารางหน่วย
 3) 30.5 ตารางหน่วย 4) 32.75 ตารางหน่วย
2. กำหนด $a, b, c, d \in I^+$ ถ้า $X = \{(a, b, c, d) \mid (a+b)(c+2d) = 15\}$ แล้ว $n(X)$ มีค่าตรงกับข้อใด
 1) 4 2) 6
 3) 8 4) 10
3. ถ้าเขียน 95^{2000} ในฐาน 2 แล้วผลบวกของเลขโดด 10 หลักสุดท้าย (ด้านขวา) เท่ากับเท่าใด
 1) 0 2) 1
 3) 2 4) 3
4. กำหนด $x = \{ABC_{10} \mid ABC_{10}, ACB_{10}, BAC_{10}, BCA_{10}, CAB_{10}, CBA_{10}$ ต่างหารด้วย 18 ลงตัว แล้ว $n(x)$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (ABC_{10} หมายถึง จำนวนนับสามหลักที่มี A เป็นหลักร้อย, B เป็นหลักสิบ และ C เป็นหลักหน่วย)
 1) 8 2) 9
 3) 10 4) 12
5. ให้ L เป็นจำนวนจริงซึ่งทำให้วงรี $x^2 + 2y^2 + 2x + 8y + L = 0$ ตัดกับไฮเพอร์โบลา $4y^2 - x^2 + 16y - 2x - 1 = 0$ เป็นจำนวน 2 จุด แล้วค่าของ L ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
 1) -5 2) -1
 3) 1 4) 5

เฉลย

1. **เฉลย 4)** 32.75 ตารางหน่วย
 พิจารณา $f(x) = x^3 - 7x - 6$
 $f(x) = (x+2)(x+1)(x-3)$
 $f(x) = 0$ เมื่อ $x = -2, -1, 3$



ทำให้วาดกราฟ f ได้คร่าวๆ ดังนี้



$$A = \int_{-2}^3 |f(x)| dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} |x^3 - 7x - 6| dx + \int_{-1}^3 |x^3 - 7x - 6| dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x^3 - 7x - 6) dx + \int_{-1}^3 (6 + 7x - x^3) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} - 6x \right]_{x=-2}^{-1} + \left[6x + \frac{7x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{x=-1}^3$$

$$= \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{7}{2} - 6 \right) - (4 - 14 + 12) \right] + \left[\left(18 + \frac{63}{2} - \frac{81}{4} \right) - \left(-6 + \frac{7}{2} - \frac{1}{4} \right) \right]$$

$$= \frac{3}{4} + 32$$

$$= 32.75 \text{ ตารางหน่วย}$$

2. **เฉลย 3)** 8
 เนื่องจาก a, b, c, d เป็นจำนวนเต็มบวก จึงพิจารณาเป็นกรณี ดังนี้
กรณีที่ 1: $a + b = 1$ และ $c + 2d = 15$ เป็นไปไม่ได้ เพราะ $a + b > 1$ เสมอ
กรณีที่ 2: $a + b = 15$ และ $c + 2d = 1$ เป็นไปไม่ได้ เพราะ $c + 2d > 1$ เสมอ
กรณีที่ 3: $a + b = 3$ และ $c + 2d = 5$
 จาก $a + b = 3$ จะได้ $(a, b) = (1, 2), (2, 1)$
 จาก $c + 2d = 5$ จะได้ $(c, d) = (3, 1), (1, 2)$
 \therefore จำนวนผลเฉลยของ $(a, b, c, d) = 2 \times 2 = 4$
กรณีที่ 4: $a + b = 5$ และ $c + 2d = 3$
 จาก $a + b = 5$ จะได้ $(a, b) = (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$
 จาก $c + 2d = 3$ จะได้ $(c, d) = (1, 1)$
 \therefore จำนวนผลเฉลยของ $(a, b, c, d) = 4 \times 1 = 4$
 รวมทั้ง 4 กรณี จะได้ว่า $n(X) = 4 + 4 = 8$

3. **เฉลย 3)** 2
 $95 = 3 \times 2^5 - 1$
 ดังนั้น โดยทฤษฎีบททวินาม จะได้ $95^{2000} = (3 \times 2^5 - 1)^{2000}$
 $= (-1)^{2000} + 2000(-1)^{1999}(3 \times 2^5) + 2^{10} \times m$
 เมื่อ m คือจำนวนเต็มจำนวนหนึ่ง (ประเด็นตรงจุดนี้คือ 2^{10} เป็นตัวประกอบของแต่ละพจน์ที่เหลือในรูปกระจายของ $(3 \times 2^5 - 1)^{2000}$)
 เนื่องจาก $(-1)^{2000} + 2000(-1)^{1999}(3 \times 2^5) = -191999$
 จะได้ $95^{2000} = -191999 + 2^{10} \times m$
 $= (2^{10} \times 188) - 191999 + 2^{10} \times m - (2^{10} \times 188)$
 $= 513 + 2^{10}(m - 188)$
 จะได้ว่า สิบหลักสุดท้ายของ 95^{2000} ในฐาน 2 มีค่าเท่ากับ 513
 แต่ $513 = 2^9 + 1 = (1000000001)_2$
 ดังนั้น ผลบวกของเลขโดด 10 หลักสุดท้ายเท่ากับ 2

4. **เฉลย 3)** 10
 จำนวนที่พิจารณาหารด้วย 18 ลงตัว นั่นคือ หารด้วย 2 และ 9 ลงตัว
 \therefore จำนวนที่พิจารณาหารด้วย 2 ลงตัว จึงทำให้ได้ว่า A, B, C ต้องเป็นจำนวนคู่
 \therefore จำนวนที่พิจารณาหารด้วย 9 ลงตัว จึงทำให้ได้ว่า $9 \mid (A + B + C)$ แต่ A, B, C เป็นจำนวนคู่ และ $A, B, C \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$
 จึงได้ $A + B + C = 18$
 หา $A + B + C = 18$ และ A, B, C เป็นจำนวนคู่ ได้ดังนี้

A	B	C
2	8	8
4	6	8
4	8	6
6	4	8
6	6	6

A	B	C
6	8	4
8	2	8
8	4	6
8	6	4
8	8	2

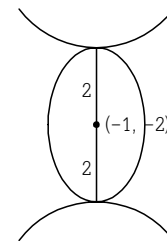
$\therefore x = \{288, 468, 486, 648, 666, 684, 828, 846, 864, 882\}$
 $\therefore n(x) = 10$

5. **เฉลย 3)** 1
 จัดรูปสมการวงรีได้เป็น
 $(x^2 + 2x + 1) + (2y^2 + 8y + 8) = 1 + 8 - L$
 $(x + 1)^2 + 2(y + 2)^2 = 9 - L$
 $\frac{(x+1)^2}{9-L} + \frac{(y+2)^2}{\frac{9-L}{2}} = 1$

เป็นวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(-1, -2)$
 และมีแกนที่ยาวตามแกน Y ยาว $2\sqrt{\frac{9-L}{2}}$ หน่วย

จัดรูปสมการไฮเพอร์โบลาได้
 $(4y^2 + 16y + 16) - (x^2 + 2x + 1) = 16$
 $4(y + 2)^2 - (x + 1)^2 = 16$
 $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{16} = 1$

เป็นไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางที่ $(-1, -2)$ แกนตามขวางขนานแกน Y ยาว 4 หน่วย



จากรูป จะเห็นว่าเพื่อให้กราฟวงรี และไฮเพอร์โบลาคัดกัน 2 จุด ความยาวตามแกน Y ของวงรี ต้องยาวเท่ากับแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลา ดังนั้น

$$2\sqrt{\frac{9-L}{2}} = 4$$

$$\therefore L = 1$$