ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย

เพื่อเตรียมสอบ ONET + 9 วิชาสามัญ + GAT-PAT

วิชาคณิตศาสตร์ (PAT1 + 9 วิชาสามัญ)

ชุดที่ 12 (ตอนที่ 1/4)

โดยช่วงตั้งแต่ 6 มี.ค.-29 มิ.ย. 61 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ป.6 ในวันอังคาร, ตะลุยโจทย์ ม.3 ในวันพุธ และตะลุยโจทย์ ม.ปลาย ในวันพฤหัส+วันศุกร์

1. กำหนด $n \in N$ ถ้า $98 < |n-4| + |n+3| - |2-n| \le 124$ แล้วมี n ทั้งหมดกี่จำนวนที่สอดคล้องอสมการข้างต้น

1) 26 2) 27 3) 52 4) 54

2. ค่าของ $1 \cdot i + 2 \cdot i^2 + 3 \cdot i^3 + \cdots + 100 \cdot i^{100}$ ตรงกับข้อใด

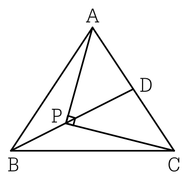
1) 1 2) $50i + 50$ 3) $50i - 50$ 4) $50 - 50i$

3. กำหนดการสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ $n+1$ เกิดจากการเชื่อมจุดกึ่งกลางของแต่ละด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปที่ n ถ้า A_n คือ ความยาวเส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ n และเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ 1 ยาวเป็น 10 หน่วย แล้วค่าของ $A_2 + A_3 + A_4 + \cdots$ มีค่าตรงกับข้อใด

1) $40 + 20\sqrt{2}$ หน่วย 2) $40 + 40\sqrt{2}$ หน่วย

3) $20 + 20\sqrt{2}$ หน่วย 4) $20 + 10\sqrt{2}$ หน่วย

4. Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี AB = AC = 5 หน่วย และ BC = 6 หน่วย จุด D อยู่บนด้าน AC และจุด P อยู่บนด้าน BD ในตำแหน่งที่ทำให้ $A\hat{P}C = 90^\circ$ ถ้า $A\hat{B}P = B\hat{C}P$ แล้วอัตราส่วน AD : DC เท่ากับเท่าใด



1) 1 : 2 2) 1 : 3 3) 2 : 1 4) 3 : 1

เฉลย

1. เฉลย 1) 26

เนื่องจาก $n \in N$ ดังนั้น $n \ge 1$

กรณีที่ 1 : $1 \le n \le 2$ จะได้
$$98 < (4-n) + (n+3) - (2-n) \le 124$$
$$98 < 5 + n \le 124$$
$$93 < n \le 119$$
ซึ่งไม่อยู่ใน $1 \le n \le 2$

กรณีที่ 2 : $2 < n \le 4$ จะได้
$$98 < (4-n) + (n+3) - (n-2) \le 124$$
$$98 < 9 - n \le 124$$
$$-115 \le n < -89$$
ซึ่งไม่อยู่ใน $2 < n \le 4$

กรณีที่ 3 : $4 < n$ จะได้
$$98 < (n-4) + (n+3) - (n-2) \le 124$$
$$98 < n + 1 \le 124$$
$$97 < n \le 123$$
ซึ่งอยู่ในช่วง $4 < n$

ดังนั้นจากทั้ง 3 กรณีจะได้คำตอบ คือ $97 < n \le 123$ แต่ n เป็นจำนวนนับ ดังนั้นเซตคำตอบ คือ {98, 99, ..., 123} ทั้งหมด 26 จำนวน

2. เฉลย 4) $50 - 50i$

ให้
$$S = 1 \cdot i + 2 \cdot i^2 + \ldots + 100 \cdot i^{100} \quad \ldots(1)$$
$$iS = 1 \cdot i^2 + 2 \cdot i^3 + \ldots + 99i^{100} + 100i^{101} \quad \ldots(2)$$

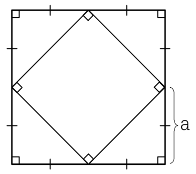
(1) − (2) ; $(1-i)S = 1 \cdot i + 1 \cdot i^2 + \ldots + 1 \cdot i^{100} - 100i^{101}$

เพราะว่า $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$ สำหรับ $n \in N$

จึงได้ว่า $(1-i)S = -100i^{101}$
$$S = \frac{-100i^{101}}{1-i} = \frac{-100i}{1-i} = \frac{-100i(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{100-100i}{2} = 50 - 50i$$

3. เฉลย 1) $40 + 20\sqrt{2}$ หน่วย

พิจารณารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ n และ n + 1



พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ n + 1 = พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปที่ n − 4 (พื้นที่รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)
$$= (2a)^2 - 4\left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a\right)$$
$$= a^2$$

จะเห็นว่า พื้นที่ของรูปที่ n + 1 = $2a^2$ และพื้นที่ของรูปที่ n = $(2a)^2 = 4a^2$ นั่นคือ พื้นที่ในรูปที่สร้างขึ้นใหม่จะมีขนาดเป็น $\frac{1}{2}$ เท่าของพื้นที่ในรูปเดิม

เนื่องจากรูปที่ 1 มีเส้นทแยงมุมยาว 10 หน่วย ดังนั้นมีพื้นที่ $\frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$ หน่วย^2 ดังนั้น รูปที่ 2 มีพื้นที่ 25 หน่วย^2 และรูปที่ 3 มีพื้นที่ 12.5 หน่วย^2 และสรุปเป็นตารางได้ดังนี้

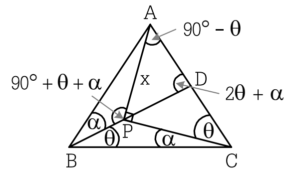
รูปที่ (n)	1	2	3	...	n	...
พื้นที่	50	25	12.5	...	$\frac{50}{2^{n-1}}$	...
A_n	$4\sqrt{50}$	$4\sqrt{25}$	$4\sqrt{12.5}$	...	$4\sqrt{\frac{50}{2^{n-1}}}$	...

โดย A_n หาได้จาก $A_n = 4\sqrt{\text{พื้นที่รูปที่ n}}$

จะเห็นว่า $\{A_n\}$ เป็นลำดับเรขาคณิต ที่มี $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ดังนั้น
$$A_2 + A_3 + A_4 + \cdots = \frac{4\sqrt{25}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$= 40 + 20\sqrt{2} \text{ หน่วย}$$

4. เฉลย 1) 1 : 2



ให้ $B\hat{C}P = A\hat{B}P = \alpha$ และ $A\hat{C}P = \theta$ จะได้ $P\hat{B}C = \theta$ ($\because A\hat{B}C = A\hat{C}B$)

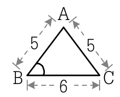
Δ PAC ; $P\hat{A}C = 180^\circ - A\hat{P}C - A\hat{C}P = 90^\circ - \theta$

Δ BCD ; $A\hat{D}P = C\hat{B}D + B\hat{C}D = \theta + (\theta + \alpha) = 2\theta + \alpha$

Δ APD ; $A\hat{P}B = P\hat{A}D + P\hat{D}A = (90^\circ - \theta) + (2\theta + \alpha) = 90^\circ + \theta + \alpha$

ให้ AP = x จาก Δ APC จะได้ว่า
$$\sin\theta = \frac{x}{AC} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 5\sin\theta \quad \ldots(*)$$

ใช้กฎของไซน์กับ Δ ABP จะได้
$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{5}{\sin(90^\circ + \theta + \alpha)}$$
$$= \frac{5}{\cos(\theta + \alpha)}$$
$$= \frac{5}{\cos(A\hat{B}C)}$$
$$= \frac{5}{\frac{3}{5}}$$



$$\cos(A\hat{B}C) = \frac{5^2 + 6^2 - 5^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{25}{3} \quad \ldots(**)$$

แทน (*) ใน (**) จะได้
$$\frac{5\sin\theta}{\sin\alpha} = \frac{25}{3}$$
$$3\sin\theta = 5\sin\alpha$$
$$3\sin\theta = 5\sin(A\hat{B}C - \theta)$$
$$3\sin\theta = 5\sin(A\hat{B}C)\cos\theta - 5\cos(A\hat{B}C)\sin\theta$$
$$3\sin\theta = 4\cos\theta - 3\sin\theta$$
$$6\sin\theta = 4\cos\theta$$
$$\tan\theta = \frac{2}{3}$$

ในการหาอัตราส่วนของ AD ต่อ DC เราจะใช้พิกัด ให้ B มีพิกัด (0, 0) และ C มีพิกัด (6, 0) จะได้ว่า A มีพิกัด (3, 4) เพราะว่าส่วนสูงจาก A ถึง BC มีความยาว 4 หน่วย

เนื่องจาก $\tan\theta = \frac{2}{3}$ เส้นตรงจาก B ถึง D มีสมการเป็น $y = \frac{2}{3}x$ และเส้นตรงจาก A ถึง C มี สมการเป็น $y = -\frac{4}{3}(x - 6)$ เราสามารถหา D ได้โดยหาจุดตัดของเส้นตรงคู่ดังกล่าว
$$\frac{2}{3}x = -\frac{4}{3}x + 8$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

ดังนั้น จุด D มีพิกัด $\left(4, \frac{8}{3}\right)$ เนื่องจากพิกัด x ของ D คือ 4 อยู่ห่างจากพิกัด x ของ A (คือ 3) เป็นระยะ $\frac{1}{3}$ ของระยะระหว่างพิกัด x ของ A (คือ 3) และของ C (คือ 6) ดังนั้น AD : DC = 1 : 2

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่

www.bunditnaenaew.com