ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย

เพื่อเตรียมสอบ ONET + 9 วิชาสามัญ + GAT-PAT

วิชาคณิตศาสตร์ (PAT1 + 9 วิชาสามัญ)

ชุดที่ 10 (ตอนที่ 1/4)

เดลินิวส์ ร่วมกับ นักเรียน โปรดทราบ

โดยช่วงตั้งแต่ 4 ก.ค.-27 ต.ค. 60 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ป.6 ในวันอังคาร, ตะลุยโจทย์ ม.3 ในวันพุธ และตะลุยโจทย์ ม.ปลาย ในวันพฤหัส+วันศุกร์

1. กำหนด w เป็นรากที่ 5 ของ 1 ที่**ไม่เป็น**จำนวนจริง ค่าของ $\sum_{n=1}^{101} w^n$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1) $w^2 + w$ 2) w
3) -1 4) 1

2. กำหนด $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$ ถ้า θ_1 ทำให้ $\sin\theta_1 + \cos\theta_1$ มีค่า**น้อยที่สุด** และ θ_2 ทำให้ $\sin^2\theta_2 - \cos\theta_2$ มีค่า**มากที่สุด** แล้วผลบวกของ θ_1, θ_2 ทั้งหมดที่เป็นไปได้ตรงกับข้อใด

1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $\frac{5\pi}{4}$
3) $\frac{9\pi}{4}$ 4) $\frac{13\pi}{4}$

3. ถ้า $f''(x) = -6x$, $f'(2) = -14$ และ $f(2) = -9$ แล้ว $f^{-1}(0)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 1 2) -1
3) 2 4) -2

4. ถ้า $\det\left(2\begin{bmatrix}3 & -5 & x\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}^{-t}\right) = \frac{1}{x}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{32}{5}$ 2) $\frac{16}{5}$
3) $-\frac{8}{5}$ 4) $-\frac{4}{5}$

5. กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ทุก $x \in \mathbf{R}$ โดย $f(x) = (2x+1)^4$ ถ้า $(fg)'(-1) = 64$ และ $\left(\frac{f}{g}\right)'(-1) = 1$ แล้ว $g(-1)$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1) -8 2) -2
3) 1 4) 3

เฉลย

1. เฉลย 2) w

เนื่องจาก $w^5 = 1$

$\therefore\ w^5 - 1 = 0 \rightarrow (w-1)(1 + w + \cdots + w^4) = 0 \because\ w \neq 1$

$\therefore\ 1 + w + \cdots + w^4 = 0$

ดังนั้น $w + w^2 + \cdots + w^4 = -1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{101} w^n &= w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + \cdots + w^{98} + w^{99} + w^{100} + w^{101}\\ &= (w + w^2 + \cdots + w^5) + (w^6 + \cdots + w^{10}) + \cdots + (w^{96} + \cdots + w^{100}) + w^{101}\\ &= (-1+1) + w^5(w + \cdots + w^5) + \cdots + w^{95}(w + \cdots + w^5) + w^{100}\cdot w\\ &= 0 + 1(-1+1) + \cdots + 1(-1+1) + 1\cdot w\\ &= w\end{aligned}$$

2. เฉลย 4) $\frac{13\pi}{4}$

I สมมติ $\sin\theta_1 + \cos\theta_1 = a$ ซึ่งเป็นค่าที่**น้อยที่สุด**

$$\sin^2\theta_1 + 2\sin\theta_1\cos\theta_1 + \cos^2\theta_1 = a^2$$

$$1 + \sin 2\theta_1 = a^2$$

$$\pm\sqrt{1 + \sin 2\theta_1} = a$$

$-1 \le \sin 2\theta_1 \le 1$ จะได้ $0 \le \sqrt{1+\sin 2\theta_1} \le \sqrt{2}$

$$0 \ge -\sqrt{1+\sin 2\theta_1} \ge -\sqrt{2}$$

ดังนั้น $a = -\sqrt{2}$; $-\sqrt{1+\sin 2\theta_1} = -\sqrt{2} \Rightarrow 1 + \sin 2\theta_1 = 2$

$$\sin 2\theta_1 = 1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

แต่ $\frac{\pi}{4}$ ทำให้ $\sin\theta_1 + \cos\theta_1 = \sqrt{2}$

$$\therefore\ \theta_1 = \frac{5\pi}{4} \qquad \text{...(1)}$$

II สมมติ $\sin^2\theta_2 - \cos\theta_2 = b$ ซึ่งเป็นค่าที่**มากที่สุด**

$$\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2 - \cos^2\theta_2 - \cos\theta_2 = b$$

$$1 - \cos^2\theta_2 - \cos\theta_2 = b$$

$$-\left(\cos^2\theta_2 + \cos\theta_2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4} = b$$

$$-\left(\cos\theta_2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} = b$$

เพราะว่า $-\left(\cos\theta_2 + \frac{1}{2}\right)^2 \le 0$ ทำให้ b มีค่า**มากที่สุด** คือ $\frac{5}{4}$

เกิดขึ้นเมื่อ $-\left(\cos\theta_2 + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$$\cos\theta_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta_2 = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \qquad \text{...(2)}$$

ดังนั้น ผลบวกของ θ_1, θ_2 ทั้งหมดเท่ากับ $\frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{13\pi}{4}$

3. เฉลย 1) 1

จาก $f''(x) = -6x$

จะได้ $f'(x) = \int(-6x)dx = -3x^2 + C_1$

แต่เรามี $f'(2) = -14$ หรือ $-3(2)^2 + C_1 = -14$ หรือ $C_1 = -2$

ดังนั้น $f'(x) = -3x^2 - 2$

จะได้ $f(x) = \int(-3x^2 - 2)dx = -x^3 - 2x + C_2$

แต่เรามี $f(2) = -9$ หรือ $-(2)^3 - 2(2) + C_2 = -9$ หรือ $C_2 = 3$

ดังนั้น $f(x) = -x^3 - 2x + 3$

ในการหา $f^{-1}(0)$ เราให้ $a = f^{-1}(0)$ จะได้ $f(a) = 0$ หรือ

$$-a^3 - 2a + 3 = 0$$

$$a^3 + 2a - 3 = 0$$

$$(a-1)(a^2 + a + 3) = 0$$

$$a = 1 \text{ หรือ } a^2 + a + 3 = 0$$

สังเกตว่า $a^2 + a + 3 = 0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $f^{-1}(0) = a = 1$

4. เฉลย 4) $-\frac{4}{5}$

$$\det\left(2\begin{bmatrix}3 & -5 & x\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}^{-t}\right) = \frac{1}{x}$$

$$2^3\det\left(\begin{bmatrix}3 & -5 & x\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}^{-t}\right) = \frac{1}{x}$$

$$8\left[\det\left(\begin{bmatrix}3 & -5 & x\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\right)\right]^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$8[(3)(4) + (-5)(4) + x(-2)]^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$8(-8 - 2x)^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$8x = -8 - 2x$$

$$10x = -8$$

$$x = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$$

5. เฉลย 1) -8

จาก $f(x) = (2x+1)^4$ จะได้ $f(-1) = (2(-1)+1)^4 = 1$

$f'(x) = 4(2x+1)^3(2)$ จะได้ $f'(-1) = 4(2(-1)+1)^3(2) = -8$

จาก $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

$$(fg)'(-1) = f(-1)g'(-1) + g(-1)f'(-1)$$

$$64 = (1)g'(-1) + [g(-1)](-8)$$

$$64 = g'(-1) - 8g(-1)$$

$$g'(-1) = 64 + 8g(-1) \qquad \text{...(1)}$$

จาก $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(-1) = \frac{g(-1)f'(-1) - f(-1)g'(-1)}{[g(-1)]^2}$$

$$1 = \frac{[g(-1)](-8) - (1)g'(-1)}{[g(-1)]^2}$$

$$1 = \frac{-8g(-1) - g'(-1)}{[g(-1)]^2}$$

$$[g(-1)]^2 + 8g(-1) + g'(-1) = 0 \qquad \text{...(2)}$$

แทน (1) ใน (2) ; $[g(-1)]^2 + 8g(-1) + 64 + 8g(-1) = 0$

$$[g(-1)]^2 + 16g(-1) + 64 = 0$$

$$[g(-1) + 8]^2 = 0$$

$$\therefore\ g(-1) = -8$$